Annales concours ecricome 2006

Mathématiques - OPTION TECHNOLOGIQUE

ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème…).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme
Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies

Evaluation
Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE 2006

Durée : 4 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. EXERCICE.

On se propose de déterminer, par deux méthodes, les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\[2ex] v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n + v_n = 2$$

2. On définit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = v_n - \frac{4}{5}$$

   a. Utiliser la question qui précède pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déterminer la raison.

   b. Exprimer x_n en fonction de n. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

   c. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers des réels respectifs l_1 et l_2 à préciser.

3. On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   a. Les matrices B et C sont-elles inversibles ?

   b. Montrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients réels, notée A telle que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

   c. Vérifier que l'on a :

$$\begin{cases} B + C = I \\ B + \dfrac{1}{6}C = A \end{cases}$$

   où I désigne la matrice unité d'ordre 2.

   d. Calculer les produits matriciels B^2, C^2, BC, CB.

   e. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left[B + \left(\frac{1}{6}\right)^n C\right] \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

   f. Retrouver ainsi l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

   g. Vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

2. EXERCICE.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes pour $f(x)$ et e^{-x} :

x	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2	3	4	5
$f(x)$	0	0.41	1,36	1,47	1,39	1,21	0,80	0,45	0,24
e^{-x}	2,71	1,65	0,61	0,37	0,22	0,14	0,05	0,02	0,01

2.1. Etude des variations de f.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1, +\infty[$.
3. Donner la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2.2. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

3. On note g la fonction définie sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ par $g(x) = f(x) - x$.

   a. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et montrer ainsi que g est décroissante sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

   b. Prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α.

   c. Montrer que si $\alpha \leqslant u_n$ alors $u_{n+1} \leqslant \alpha$. Montrer que si $u_n \leqslant \alpha$ alors $\alpha \leqslant u_{n+1}$.

4. Rappeler l'énoncé du théorème de l'inégalité des accroissements finis et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.

3. EXERCICE.

On dispose d'une urne qui contient des boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.
On y effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour voir pour la première fois toutes les boules de l'urne.

3.1. Calcul de la somme d'une série.

On considère un entier $n \geqslant 1$ et la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[\,, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Donner l'expression de $S_n(x)$ et en déduire la valeur de la somme :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

3.2. On suppose que l'urne contient 2 boules $(N = 2)$.

1. Montrer que la probabilité d'avoir effectué n tirages pour voir pour la première fois les deux boules de l'urne, est donnée par :

$$\text{pour } n \geqslant 2, \qquad p\,[X = n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2. Vérifier que la variable aléatoire $Y = X - 1$ suit une loi géométrique. Quel en est son paramètre ? Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de X.

3.3. On suppose que l'urne contient 3 boules ($N = 3$).

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement : "la boule A (respectivement la boule B, la boule C) n'a pas été obtenue au cours des n tirages", $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$p[A_n], \ p[A_n \bigcap B_n], \ p[A_n \bigcap B_n \bigcap C_n]$$

2. Exprimer l'événement $[X > n]$ en fonction des événements A_n, B_n, C_n.

3. En utilisant la formule ci-dessous :

$$P[A_n \cup B_n \cup C_n] = p[A_n]+p[B_n]+p[C_n]- p[A_n \bigcap B_n]- p[B_n \bigcap C_n]- p[A_n \bigcap C_n]+ p[A_n \bigcap B_n \bigcap C$$

Prouver que pour tout $n \geqslant 2$:

$$p[X > n] = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

4. En déduire que la loi de X est donnée par :

$$\text{pour tout } n \geqslant 3 \qquad p[X = n] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

5. Vérifier que :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} p[X = n] = 1$$

6. Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.

CORRIGÉ

1. EXERCICE.

On se propose de déterminer, par deux méthodes, les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n + v_n = 2 \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car $u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n = u_n + v_n = 2$$

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_n + v_n = 2$

2. On définit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = v_n - \frac{4}{5}$$

a. Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = v_{n+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{3}(2 - v_n) + \frac{1}{2}v_n - \frac{4}{5} = \frac{1}{6}v_n - \frac{2}{15} = \frac{1}{6}(v_n - \frac{4}{5})$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$.

b. On peut écrire x_n en fonction de n.

$$x_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n x_0 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Puis

$$v_n = x_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$u_n = 2 - v_n = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

c. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{4}{5} \text{ et } \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{6}{5}$$

3. On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Les colonnes des matrices B et C sont colinéaires donc les matrices B et C ne sont pas inversibles.

b. Pour tout entier naturel n, on a de façon simple :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c. 0n a bien :

$$\begin{cases} B + C = I \\ B + \frac{1}{6}C = A \end{cases}$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 2.

d. Calcul des produits matriciels B^2, C^2, BC, CB.

$$B^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = B$$

$$C^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} = C$$

$BC = CB = 0$

e. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left[B + \left(\frac{1}{6}\right)^n C\right]\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \left[B + \left(\frac{1}{6}\right)^0 C\right]\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = [B + C]\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left(B + \frac{1}{6}C\right)\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \left(B + \frac{1}{6}C\right)\left[B + \left(\tfrac{1}{6}\right)^n C\right]\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} C^2 + B^{2+}\frac{1}{6}CB + \left(\frac{1}{6}\right)^n BC\right)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} C + B\right)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left[B + \left(\frac{1}{6}\right)^n C\right] \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

f. Retrouvons ainsi l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 3 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n & 2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

g. On a bien :

$$B\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

2. EXERCICE.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n) \\ & u_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

3

où f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

2.1. Etude des variations de f.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ et

$$\forall x \in [-1, +\infty[\quad f'(x) = \left(2(x+1) - (x+1)^2\right) e^{-x} = \left(1 - x^2\right) e^{-x}$$

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1,+\infty[$.

x	-1		1		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	

3. Par prépondérance de la fonction exponentielle sur la fonction puissance

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{2xe^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = 0$$

2.2. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouvons, par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car $1 \leqslant u_0 = \dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{3}{2}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n c'est-à-dire $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$ et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Puisque f est décroissante sur $[1,+\infty[$, alors $f(\dfrac{3}{2}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ ou encore $\dfrac{25}{4}e^{-\frac{3}{2}} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4e^{-1}$. Comme $\dfrac{25}{4}e^{-\frac{3}{2}} \simeq \dfrac{25}{4}0.22 = 1.375$ et $4e^{-1} \simeq 4*0.36 = 1.44$ on a bien $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n

$$1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$$

2. On a :

$$\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad \begin{array}{l} |f'(x)| = |(1-x^2)\,e^{-x}| \leqslant (x^2-1)\,e^{-x} \\ \\ |f'(x)| \leqslant (\frac{9}{4}-1)e^{-1} = \frac{5}{4}e^{-1} \simeq \frac{5}{4}0.36 = 0.45 \end{array}$$

On a bien

$$\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

3. On note g la fonction définie sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a.

$$\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \qquad g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant 0$$

ainsi g est décroissante sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

b. La fonction g est continue strictement décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, réalise une bijection de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ sur $\left[g(\frac{3}{2}), g(1)\right]$ avec $g(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) - \frac{3}{2} \simeq -0.125$ et $g(1) = f(1) - 1 \simeq 0.44$. Le réel 0 qui appartient à $\left[g(\frac{3}{2}), g(1)\right]$ possède un unique antécédent par g. Il existe donc un unique réel α appartenant à $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. et $f(\alpha) = \alpha$.

c. Montrons que pour tout entier naturel n,

$$(u_{n+1} - \alpha)(u_n - \alpha) \leqslant 0$$

Deux cas se présentent :
-si $(u_n - \alpha) \leqslant 0$ c'est-à-dire $u_n \leqslant \alpha$ alors $f(u_n) = u_{n+1} \geqslant f(\alpha) = \alpha$ (f est décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$) et donc $(u_{n+1} - \alpha)(u_n - \alpha) \leqslant 0$.
-si $(u_n - \alpha) \geqslant 0$ c'est-à-dire $u_n \geqslant \alpha$ alors $f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f(\alpha) = \alpha$ (f est décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$) et donc $(u_{n+1} - \alpha)(u_n - \alpha) \leqslant 0$.

4. f est dérivable sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ à dérivée bornée puisque pour tout x de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, pour tout a et b de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2} |b - a|$$

Pour $b = u_n$ et $a = \alpha = f(\alpha)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \tfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \tfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Puis montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car $|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$. $(\alpha \in \left[1, \frac{3}{2}\right])$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n c'est-à-dire $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On en déduit, puisque $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

3. EXERCICE.

On dispose d'une urne qui contient des boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.
On y effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour voir pour la première fois toutes les boules de l'urne.

3.1. Calcul de somme de séries.

On considère un entier $n \geqslant 1$.

$$\forall x \in [0,1[\qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

3.2. On suppose que l'urne contient 2 boules $(N = 2)$.

1. Pour voir pour la première fois les deux boules de l'urne, il faut tirer une première boule puis tirer à la suite $n-2$ fois la même boule que la première, et enfin tirer l'autre boule donc :

   pour $n \geqslant 2$

   $$p\left[X=n\right] = \underbrace{1}_{\text{il faut tirer une première boule}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}_{\text{puis tirer à la suite n-2 fois la même boule}} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{tirer l'autre boule}}$$

   $$\text{pour } n \geqslant 2 \qquad p\left[X=n\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2. Vérifions que la variable aléatoire $Y = X - 1$ suit une loi géométrique.

   $$\text{pour } n \geqslant 1 \qquad p\left[Y=n\right] = p\left[X=n+1\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$ et donc

   $$E(Y) = \frac{1}{p} = 2, V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{2}4 = 2$$

   On peut en déduire la valeur de l'espérance et de la variance de X.

   $$E(X) = E(Y) + 1 = 3, V(X) = V(Y) = 2$$

3.3. On suppose que l'urne contient 3 boules ($N = 3$).

On note A_i l'événement : "la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des n tirages.

1. Déterminons les probabilités :
$$p[A_1] = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$
$$p[A_1 \bigcap A_2] = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$
$$p[A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3] = 0$$

2. On peut écrire que $[X > n] = [A_1 \cup A_2 \cup A_3]$ puisque si le nombre de tirages dépasse n c'est que l'une au moins des trois boules n'a pas été tirée au cours des n tirages.

3. D'après la formule de Poincaré, pour tout $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned}&p[X > n] = p[A_1 \cup A_2 \cup A_3]\\ &= p[A_1] + p[A_2] + p[A_3] - p[A_1 \bigcap A_2] - p[A_3 \bigcap A_2] - p[A_1 \bigcap A_3] + p[A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3]\\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

4. Donnons la loi de X :
$$p[X = n] = p[X > n-1] - p[X > n]$$
$$= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1 - \frac{2}{3}) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}(1 - \frac{1}{3})$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

5. Vérifions que $\sum_{n=2}^{+\infty} p[X = n] = 1$. Les séries $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ sont convergentes donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} p[X = n]$ est convergente et
$$\sum_{n=2}^{+\infty} p[X = n] = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 - 2\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + 2 = 3 - 1 - 3 + 2 = 1$$

6. Montrons que X admet une espérance. Les séries $\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ sont convergentes donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} np[X = n]$ est convergente. X admet donc une espérance et :
$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} np[X = n] = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} - 1 - 2\frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} + 2 = 9 - 1 - \frac{9}{2} + 2 = \frac{11}{2}\end{aligned}$$

RAPPORT

EXERCICE 1

L'exercice a été réussi de façon très hétérogène par les candidats. Beaucoup ne trouvent pas la raison de la suite (x_n) et donc laissent la fin de la seconde question.

Les calculs matriciels sont mieux abordés avec des difficultés cependant pour la récurrence de la question 3.

EXERCICE 2

C'est l'exercice qui a été le mieux réussi. Beaucoup de candidats le cherchent dans sa totalité.

Très peu d'étudiants arrivent à faire correctement la question 2.2.2 sur la majoration de la valeur absolue de $f'(x)$ et l'initialisation de la récurrence de la question 2.2.4.

En général, les hypothèses des théorèmes de la bijection et de l'inégalité des accroissements finis sont connues.

Par contre beaucoup ne justifient pas suffisamment l'étude du signe de $f'(x)$ et la limite en l'infini. Certains d'ailleurs avouent même utiliser le tableau de valeurs donné dans l'énoncé pour trouver leurs deux résultats.

EXERCICE 3 OU PROBLÈME

Cet exercice assez "original" pour des élèves de la voie technologique a été peu et souvent mal abordé.

Les résultats de cours de la question 3.1 sont mal connus. A la question 3.2, beaucoup pensent à tort que X suit une loi géométrique ce qui implique pour eux que Y suit aussi une loi géométrique. La question 3.3 est mieux abordée mise à part la question relative $P(X=n)$ et l'espérance de X.

BILAN

Avec un écart-type de **5.39** et une moyenne générale de **10.14** cette épreuve semble avoir joué son rôle discriminant, permettant d'étaler clairement les notes.