

1. EXERCICE.

On considère la fonction f déterminée sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité choisie étant le cm.

1.1. Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) = x^3 - x + 3 - 2 \ln x$$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x) = 3x^3 - x - 2$.
 1. Prouver que P est factorisable par $x - 1$.
 2. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
 3. Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur \mathbb{R} .
2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.
4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) > 0$$

1.2. Etude de la fonction f .

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f , notée \mathcal{C}_f ?
 - Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.
 - Montrer que sur $[1, +\infty[$, la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la droite (Δ) .
- On donne le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	3
$f(x)$	-3,3	4,3

- Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

- En déduire les variations de f .
- Donner l'allure de \mathcal{C}_f et tracer la droite (Δ) .
- Hachurer la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_f , (Δ) et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
- Ecrire, à l'aide d'une intégrale, la valeur de l'aire de la partie hachurée du plan.
- A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de cette intégrale.

2. EXERCICE.

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$

A cet effet on définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Calcul de la puissance $n^{\text{ème}}$ de A .

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC et CB .
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :

$$B^n = B, \quad C^n = (-1)^{n-1}C$$

3. Vérifier que l'on a :

$$A^2 = 5A - 6I$$

où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.

4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I .
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$A^n = 3^n B - 2^n C$$

La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C ?$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$(A^{-1})^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

2.2. Expression de u_n en fonction de n .

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n .

3. EXERCICE.

Soucieux de mieux connaître sa clientèle, un gérant de magasin a réalisé une étude :

3.1. Etude du temps moyen d'attente en caisse.

Après enquête, on estime que le temps d'attente en caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On suppose que les temps d'attente successifs d'une même personne lors des différents passages en caisse sont indépendants.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. On note F_T la fonction de répartition de la variable T . Démontrer que :

$$\begin{cases} F_T(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ F_T(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Vérifier que la probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à quatre unités (de temps) est égale à $\frac{1}{25}$.
4. Quelle est la probabilité que le temps d'attente en caisse soit inférieur à cinq unités sachant qu'il est supérieur à quatre unités ?
5. Pendant 125 jours une même personne se présente à la caisse.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où cette personne attend plus de quatre unités à la caisse.

1. Déterminer la loi de X .
2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X .

6. Plus impatient, un autre client décide de passer à la concurrence le jour où il attend plus de quatre unités à la caisse.

On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où ce client s'est présenté à la caisse de ce magasin avant de passer à la concurrence, si cet événement se produit.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y .

3.2. Mode de paiement de la clientèle.

L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$

$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$

$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$

$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de S et U .
2. Calculer la covariance du couple (S, U) . Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?