



**BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES**

---

**Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY**

**CODE SUJET :**

294  
ESC\_MATT

---

OPTION TECHNOLOGIQUE

**MATHEMATIQUES**

mardi 15 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

---

**N.B.**

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## EXERCICE 1

Soient les matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$   $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Calculer les produits matriciels  $A(A - I)$  et  $B(B - I)$ .
- (b) En déduire que  $A^2 = A$  et  $B^2 = B$ .
- (c) Calculer  $AB$  ainsi que  $BA$  (ces deux produits donnent un résultat simple).

On note dans toute la suite  $W = A + 2B$ .

2. (a) Calculer les produits  $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
  - (b) En déduire que  $W \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $W$  est-elle inversible ?
  - (c) Montrer que  $W = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  et retrouver le résultat précédent par méthode du pivot.
3. (a) En utilisant les relations obtenues en question 1., montrer que  $W^2 = A + 4B$ .
  - (b) Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$W^n = A + 2^n B.$$

Dans toute la suite de cet exercice on note pour tout réel  $x$  la matrice  $H(x) = A + xB$ .

4. (a) Calculer le produit  $H(x) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et en déduire que la matrice  $H(x)$  n'est pas inversible.
- (b) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $H(x)H(y) = H(xy)$ .
- (c) En déduire par récurrence sur  $n$  que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $(H(x))^n = H(x^n)$ .  
Quelle relation retrouve-t-on en prenant  $x = 2$  ?

## EXERCICE 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) = e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $] -\infty ; 0 ]$  et sur  $] 0 ; +\infty [$ .
- (b) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  puis en déduire que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

(c) Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ . Montrer que :  $\theta - \theta^3 \geq 0$ .

(d) Montrer que si  $t > 0$  alors  $e^{-\frac{2}{3}t}$  est un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ .

En déduire grâce à la question (c), et en posant  $\theta = e^{-\frac{2}{3}t}$ , que  $f(t) \geq 0$ .

Dans toute la suite de l'exercice on note pour tout réel  $x$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ .

2. (a) Que vaut  $F(x)$  lorsque  $x \leq 0$  ?

Justifier que si  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

(b) Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif et pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$\int_0^x e^{-at} dt = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}).$$

(c) En déduire que pour tout réel  $x$  strictement positif :  $F(x) = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ .

(d) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

On considère alors une variable aléatoire  $X$  admettant une densité  $f$ , et de fonction de répartition  $F$ .

3. On s'intéresse dans cette question à l'équation notée (E) :

$$P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \quad (\mathbf{E})$$

équation dont l'inconnue est le réel  $\mu$  strictement positif.

(a) Justifier que pour tout réel  $x$ ,  $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$ .

En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') :

$$P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{E}')$$

(b) Montrer que (E')  $\Leftrightarrow 1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0$ .

(c) Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $]0; 1[$  par :  $g(\theta) = 1 - 3\theta + \theta^3$  réalise une bijection de  $]0; 1[$  sur  $] -1; 1[$ .

(d) En déduire par le même changement de variable qu'au 1. (d) que l'équation (E) admet une et une seule solution (qu'on ne cherchera pas à calculer).

### EXERCICE 3

Un sac  $S$  contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.  
Les parties **A**, **B** et **C** de cet exercice sont indépendantes, elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac mentionné ci-dessus.

#### Partie A

1. Montrer que si l'on extrait deux jetons simultanément de  $S$ , la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2 est :  $p = \frac{3}{10}$ . ( On pourra conserver cette notation dans la suite de cette partie A ).
2. Dans cette question on considère le sac  $S$  et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise ( les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac  $S$  avant le tirage des deux jetons suivants ).  
On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2 .
  - (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .  
( On précisera  $X(\Omega)$  et  $P(X = k)$  pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$  ).
  - (b) Déterminer l'espérance mathématique  $E(X)$  et vérifier que  $V(X) = (21)^2$ .
3.
  - (a) On décide d'une approximation de  $X$  par une variable  $T$  suivant une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .  
Quelles valeurs donner à  $m$  et  $\sigma$  pour que  $X$  et  $T$  aient même espérance et même variance ?
  - (b) Calculer alors la probabilité  $P(588 < T \leq 672)$  en utilisant la fonction de répartition  $\Phi$  de la loi normale centrée réduite . ( On donne  $\Phi(2) \approx 0,97725$  )

#### Partie B

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac  $S$ . On désigne par  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.

1.
  - (a) Justifier que la variable aléatoire  $Z = Y + 1$  suit une loi classique.
  - (b) En déduire  $Y(\Omega)$  puis la probabilité  $P(Y = k)$  pour tout entier  $k$  de  $Y(\Omega)$ .
2.
  - (a) Préciser l'espérance mathématique et la variance de  $Z$ .
  - (b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de  $Y$ .

#### Partie C

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac  $S$ .

On désigne par  $X_1$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés,  
et par  $X_2$  la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

1. Donner la loi de probabilité du couple  $(X_1, X_2)$ , en présentant les résultats dans un tableau à double entrée.
2. En déduire la loi de probabilité de  $X_1$  et celle de  $X_2$ .
3. Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?