BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
285
CCIP_M2_T

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants

Exercice 1

Le réel e désigne la base du logarithme népérien.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n par la relation suivante, valable pour tout réel x :
$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ si n est supérieur ou égal à 1, avec $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
2. (a) Calculer la dérivée de la fonction qui, à tout réel x associe $\ln(1+e^x)$, et en déduire la valeur de u_0.

   (b) Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$, et en déduire la valeur de u_1.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note l sa limite.
4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n + u_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}(1 - e^{-n+1})$.

   (b) En déduire la valeur de l.

5. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n supérieur où égal à 2, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1}$.

Exercice 2

Toutes les matrices considérées dans cet exercice sont des matrices carrées d'ordre 3.

On note I la matrice définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n) désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, on pose :

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, on pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k$, c'est-à-dire que $S_n = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n$. On pose également $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, lorsque cette limite existe.

1. Dans cette question, la matrice A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2.
   (b) Calculer A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.
   (c) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de S_n sous forme de tableau matriciel.
   (d) En déduire l'expression de la matrice S.

2. Dans cette question, la matrice A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2.
   (b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'expression de A^k en fonction de k.
   (c) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $S_n = I + \frac{1}{3}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A$.
   (d) Donner l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

3. Dans cette question, la matrice A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^2 - 2A + I$.
   (b) Établir, pour tout k de $\mathbb{N}$, la relation : $A^k = kA - (k-1)I$.
   (c) Donner l'expression de S_n en fonction de A et de I.
   (d) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{n!}$.

   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}$

(e) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = e$.

(f) Déduire des questions précédentes, l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité P.
Pour tout événement M et tout événement N tel que $P(N) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de M sachant N, notée $P_N(M)$, est donnée par : $P_N(M) = \dfrac{P(M \cap N)}{P(N)}$.
On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M.

1. On considère trois événements A, B, C tel que $P(B) \neq 0,\ P(B) \neq 1,\ P(C) \neq 0,\ P(B \cap C) \neq 0$.

   (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C)$.

   (b) En déduire alors la formule suivante : $P_C(A) = P_{B\cap C}(A)P_C(B) + P_{\overline{B}\cap C}(A)P_C(\overline{B})$.

   Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant *Pile* avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et *Face* avec la probabilité q, où $q = 1 - p$.
   On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.
   Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : « on obtient *Face* à l'issue du k-ième lancer ».
   $\overline{F}_k$ est donc l'événement : « on obtient *Pile* à l'issue du k-ième lancer ».
   On considère l'événement E : « 2 *Face* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Pile* consécutifs ».
   Par exemple :
   - si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F}_2F_3\overline{F}_4F_5F_6$, alors E est réalisé ;
   - si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F}_1F_2F_3\overline{F}_4\overline{F}_5F_6$, alors E est réalisé ;
   - si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F}_2F_3\overline{F}_4\overline{F}_5F_6$, alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $P_{F_1\cap F_2}(E)$.

   (b) Justifier également sans calcul la relation suivante : $P_{F_1\cap\overline{F}_2}(E) = P_{\overline{F}_1}(E)$.

   (c) En utilisant la relation trouvée à la question $1(b)$, avec $A = E,\ B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $P_{F_1}(E)$ et $P_{\overline{F}_1}(E)$.

3. (a) Que vaut $P_{\overline{F}_1\cap\overline{F}_2}(E)$?

   (b) Montrer que $P_{\overline{F}_1\cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$.

   (c) Toujours en utilisant la relation de la question $1(b)$ appliquée à des événements bien choisis, montrer que $P_{\overline{F}_1}(E) = qP_{F_1}(E)$.

4. (a) Déduire des questions 2 et 3 les égalités : $P_{F_1}(E) = \dfrac{q}{1-pq}$ et $P_{\overline{F}_1}(E) = \dfrac{q^2}{1-pq}$.

   (b) Calculer $P(E)$ en fonction de p et de q.

5. On note G l'événement « 2 *Pile* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Face* consécutifs »

   (a) Expliquer comment trouver $P(G)$ sans calcul.

   (b) Vérifier que $P(E) + P(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 4

Pour toute variable aléatoire Z admettant une espérance et une variance, ces dernières sont notées $E(Z)$ et $V(Z)$ respectivement.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + b \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X dont l'espérance vaut $\frac{3}{5}$, si et seulement si $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{3}{5}$.
   Dans toute la suite, on prendra pour a et b les valeurs données ci-dessus .
2. Calculer la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition, notée F, de la variable aléatoire X.
4. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, étant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X, on considère, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire S_n définie par :
   $S_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire telle que pour tout réel x, on a :
   $[S_n \leqslant x] = ([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x])$.
   (a) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n, notée F_n, est donnée par :
   $$\begin{cases} F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F_n(x) = \left(\dfrac{2x^3 + 3x}{5}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ F_n(x) = 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$
   (b) Justifier que $E(S_n) = \displaystyle\int_0^1 x f_n(x)dx$, où f_n désigne une densité de S_n.
   (c) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la formule suivante : $E(S_n) = 1 - \displaystyle\int_0^1 F_n(x)dx$.
   (d) Établir, pour tout x de $[0,1]$, l'inégalité suivante : $F_n(x) \leqslant \left(\dfrac{3x+2}{5}\right)^n$.
   (e) Pour tout x de $[0,1]$, on pose $g_n(x) = \left(\dfrac{3x+2}{5}\right)^n$.
   Vérifier qu'une primitive G_n de g_n sur $[0,1]$ est donnée par : $G_n(x) = \dfrac{5}{3(n+1)}\left(\dfrac{3x+2}{5}\right)^{n+1}$.
   (f) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(S_n) = 1$.