

ESPRIT GENERAL**Objectifs de l'épreuve**

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme

Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies.

Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE 2008**Durée : 4 heures**

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET**Exercice 1**

Après quelques questions préliminaires d'algèbre linéaire, on étudie dans cet exercice le mouvement aléatoire d'une puce, qui se déplace sur les sommets d'un triangle A, B, C .

1.1. Puissance n ème d'une matrice.

On considère les matrices M et P définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} . Que constatez-vous ?

2. Vérifier que la matrice $D = PMP$ est une matrice diagonale.

3. Justifier que $M = PDP$ et établir par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$M^n = PD^nP$$

4. En déduire que l'expression matricielle de M^n est donnée pour tout entier naturel n par :

$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Etude du mouvement aléatoire d'une puce.

À l'instant initial $t = 0$, la puce est au sommet A et se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si à l'instant n la puce est au sommet A du triangle, elle est à l'instant $n + 1$ au sommet B avec la probabilité égale à $1/3$, au sommet C avec la probabilité égale à $2/3$.
- Si à l'instant n la puce est au sommet B du triangle, elle est à l'instant $n + 1$ soit au sommet C , soit au sommet A de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est au sommet C alors elle y reste.

Pour tout entier naturel n , on désigne par :

A_n , l'événement "la puce est au sommet A à l'instant n ", et par a_n sa probabilité.

B_n , l'événement "la puce est au sommet B à l'instant n ", et par b_n sa probabilité.

C_n , l'événement "la puce est au sommet C à l'instant n ", et par c_n sa probabilité.

1. Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1 .
2. Exprimer, à l'aide de la formule des probabilités totales, les probabilités $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n .
3. En déduire une matrice A telle que l'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que la matrice $A^2 = M$.

4. Établir que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. En déduire, que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{pmatrix} = AM^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer les expressions de $a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}$ et c_{2n+1} en fonction de l'entier naturel n .
7. Montrer que les suites $(a_{2n}), (b_{2n}), (c_{2n}), (a_{2n+1}), (b_{2n+1}), (c_{2n+1})$ sont convergentes.
8. Les valeurs de b_{2n} et a_{2n+1} étaient-elles prévisibles ?

Exercice 2

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = e^x(x-1) + x^2$$

2.1. Etude de la fonction g .

- Déterminer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
- Calculer la fonction dérivée de g , montrer que son signe ne dépend que du signe de x et en déduire les variations de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$. (On ne cherchera pas à déterminer α).
- A l'aide du tableau de valeurs suivant, donner un encadrement le plus précis possible de α .

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$g(x)$	-1	-0,57	1	4,49	11,38	24,5

2.2. Etude d'une suite (u_n) .

Soit f la fonction de la variable réelle déterminée sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

On considère la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Prouver que α est l'unique solution sur l'intervalle I de l'équation :

$$f(x) = x.$$

- Calculer la fonction dérivée f' et déterminer les variations de f sur l'intervalle I .
- Sachant que $f(0,5) \approx 0,76$ et $f(1) \approx 0,72$, démontrer que l'intervalle I est stable par f , c'est-à-dire que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

- Montrer que pour tout x de I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \in I.$$

- Appliquer à f l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I et prouver que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right) |u_n - \alpha|.$$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

- Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si l'entier n est supérieur ou égal à n_0 alors $|u_n - \alpha|$ est inférieur ou égal à 10^{-3} .

2.3. Un calcul d'aire.

Sur l'annexe, située en fin de problème, on donne les courbes représentatives sur $[0, +\infty[$ de trois fonctions : celle de g , celle de $\varphi : x \mapsto x^2$ et celle d'une fonction ψ inconnue.

- Associer à chacune des courbes (C_1) , (C_2) , (C_3) , la fonction dont elle est la représentation.
- $\mathcal{A}$ désignant l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie hachurée sur le schéma, exprimer $\mathcal{A}$ sous forme d'une intégrale.
- En utilisant une intégration par parties, déterminer $\mathcal{A}$.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de deux jeux présents dans une fête foraine.

3.1. Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.

- Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.
 - Donner la loi de X_N , ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
 - Justifier que $Y_N = 3X_N - N$. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N .
- Une seconde personne joue jusqu'à ce qu'elle gagne pour la première fois une partie, et s'arrête alors de jouer. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de parties jouées et T la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.
 - Donner la loi de Z .
 - Exprimer T en fonction de Z , en déduire l'espérance de T .
- Pour quelle valeur de N les deux joueurs peuvent-ils espérer le même gain ?

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

SUJET

CORRIGE

RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

SUJET

CORRIGE

RAPPORT

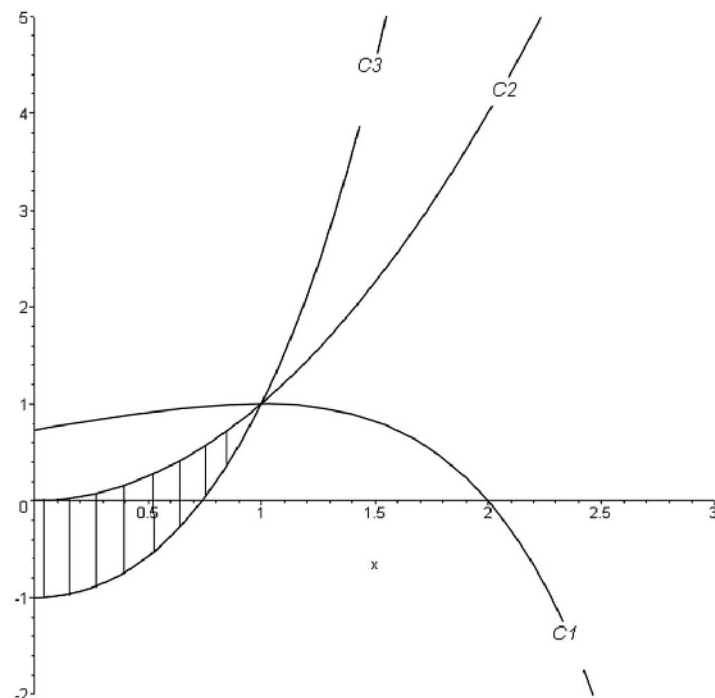
3.2. Deuxième jeu.

1. On considère une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Un joueur lance une fléchette sur cette cible. On note D la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la cible. On suppose que D est une variable à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

- b. Déterminer l'espérance de D .
- c. Déterminer la fonction de répartition F de D .
- d. Quelle est la probabilité de l'événement $A =$ "la fléchette n'atteint pas la cible" ?
2. Un joueur se présente au stand de tir et lance trois fléchettes sur la cible décrite à la question précédente. Le joueur gagne si les trois fléchettes sont à une distance du centre O inférieure à $\frac{1}{2}$. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note D_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de la $i^{\text{ème}}$ fléchette au centre O . On suppose que ces trois variables D_1, D_2, D_3 sont indépendantes et suivent la même loi que D .

- a. Quelle est la probabilité de l'événement $[D_i \leq \frac{1}{2}]$?
- b. Quelle est la probabilité de l'événement $G =$ "le joueur gagne la partie" ?



CORRIGE

Exercice 1

Après quelques questions préliminaires d'algèbre linéaire, on étudie dans cet exercice le mouvement aléatoire d'une puce, qui se déplace sur les sommets d'un triangle A, B, C .

1.1. Puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.

On considère les matrices M et P définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1} .

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2^{**}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

** A cette étape la matrice est triangulaire, aucun de ses éléments diagonaux n'est nul, on peut affirmer que P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que $P^{-1} = P$.

2. Vérifions que la matrice $D = PMP$ est une matrice diagonale

$$PMP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PMP = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion :

$$PMP = D = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

3. En multipliant à gauche par $P = P^{-1}$ et à droite par P dans l'égalité $D = PMP$, on obtient : $M = PDP$. Par récurrence évidente on démontre que pour tout entier naturel n ,

$$[M = PD^n P]$$

4. Sachant que $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on en déduit l'expression matricielle de M^n

$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Etude du mouvement aléatoire d'une puce.

1. Donnons les valeurs de a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1 .

$$a_0 = 1, b_0 = 0 = c_0$$

La puce ne peut se retrouver en A à l'instant $t = n + 1$ qu'en provenant de B. La puce ne peut se retrouver en B à l'instant $t = n + 1$ qu'en provenant de A. La puce ne peut se retrouver en C à l'instant $t = 1$ qu'en provenant de A. Il en découle que

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = P(B_1/A_0)p(A_0) = \frac{1}{2} \\ c_1 = P(C_1/A_0)p(A_0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2. A l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\begin{cases} a_{n+1} = P(A_{n+1}/B_n)p(B_n) \\ b_{n+1} = P(B_{n+1}/A_n)p(A_n) \\ c_{n+1} = P(C_{n+1}/A_n)p(A_n) + P(C_{n+1}/B_n)p(B_n)P(C_{n-1}/C_n)p(C_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \\ c_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \end{cases}$$

3. Le système linéaire de récurrence précédent peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Vérifions que la matrice $A^2 = M$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix} = M$$

4. Pour tout entier naturel n , par une récurrence évidente, : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{pmatrix} = A^{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Puis :

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{pmatrix} = A^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{2n} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Donnons l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de l'entier naturel n .

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

7. Les sous-suites d'indices pairs et impairs de $(a_n), (b_n)$ convergent vers 0 et les sous-suites d'indices pairs et impairs de (c_n) convergent vers 1.

$$\begin{cases} \lim a_{2n+1} = 0, \lim a_{2n} = 0 \\ \lim b_{2n} = 0, \lim b_{2n-1} = 0 \\ \lim c_{2n} = 1, \lim c_{2n-1} = 1 \end{cases}$$

8. A une étape de rang pair la puce est soit en A ou en C. De même à une étape de rang impair la puce est soit en C ou en B. Les valeurs nulles de b_{2n} et a_{2n+1} étaient donc prévisibles.

Exercice 2

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = e^x(x-1) + x^2$$

2.1. Etude de la fonction g .

1. Déterminons les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(x-1) + x^2 = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x-1) + x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x - e^x + x^2 = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

2. Calculons la fonction dérivée de g , montrons que son signe ne dépend que du signe de x .

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables. Pour tout x réel :

$$g'(x) = e^x(x-1) + e^x + 2x = x(e^x + 2).$$

g' est du signe de x car $e^x + 2 > 0$. g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

3. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$. (On ne cherchera pas à déterminer α).

La restriction de g est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1, +\infty[$. Tout réel de l'intervalle $[-1, +\infty[$ possède un unique antécédent et en particulier le réel 0. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. $g(0,5) < 0, g(1) > 0$. On peut donc affirmer que :

$$0,5 < \alpha < 1$$

2.2. Etude d'une suite (u_n) .

Soit f la fonction de la variable réelle déterminée sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

On considère la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Prouvons que α est l'unique solution sur l'intervalle I de l'équation :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + x} = x \\ &\Leftrightarrow e^x = (e^x + x)x \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

2. Calculons la fonction dérivée f' .

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f'(x) &= \frac{e^x(e^x + x) - e^x(e^x + 1)}{(e^x + x)^2} \\ f'(x) &= \frac{e^x(x-1)}{(e^x + x)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

et f est décroissante sur l'intervalle I .

3. f étant décroissante sur I , pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\frac{1}{2} < 0,76 \approx f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1) \approx 0,72 < 1$$

donc l'intervalle I est stable par f .

4. Pour tout x de I :

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{e^x(x-1)}{(e^x + x)^2} \right| = \frac{|x-1|}{(e^x + x)} f(x) \\ e^x + x &\geq 1, \frac{1}{(e^x + x)} \leq 1, f(x) \leq 1 \text{ et } |x-1| \leq \frac{1}{2} \\ \text{donc :} \\ \forall x \in I \quad |f'(x)| &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \in I. \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $u_0 = \frac{1}{2}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n . L'intervalle I étant stable par f , $u_{n+1} = f(u_n)$ appartient à I , $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. L'axiome de récurrence achève la démonstration.

6. Appliquons à f l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I entre u_n et α . f est continue sur $[\alpha, u_n]$ ou $[u_n, \alpha]$, dérivable sur $] \alpha, u_n[$ ou $] u_n, \alpha[$ avec $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(\alpha)| &\leq \left(\frac{1}{2}\right) |u_n - \alpha|. \\ \text{Donc } |u_{n+1} - \alpha| &\leq \left(\frac{1}{2}\right) |u_n - \alpha|. \end{aligned}$$

Par récurrence, montrons que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \mathcal{H}_n$$

Comme $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\frac{1}{2} - 1 \leq u_0 - \alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. $\mathcal{H}_0$ est donc vraie. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right) |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. L'axiome de récurrence achève la démonstration.

7. Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si l'entier n est supérieur ou égal à n_0 alors $|u_n - \alpha|$ est inférieur ou égal à 10^{-3} .

Il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$ c'est-à-dire $n \geq \frac{3 \ln(10)}{\ln 2} - 1$. Prenons $n_0 = E\left(\frac{3 \ln(10)}{\ln 2}\right)$.

2.3. Un calcul d'aire.

Sur l'annexe, située en fin de problème, on donne les courbes représentatives sur $[0, +\infty[$ de trois fonctions : celle de g , celle de $\varphi : x \mapsto x^2$ et celle d'une fonction ψ inconnue.

- (C_2) est associée à φ , (C_3) est associée à g , (C_1) est associée à ψ .
- $\mathcal{A}$ désignant l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie hachurée sur le schéma, exprimer $\mathcal{A}$ sous forme d'une intégrale.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x^2 - g(x)) dx = \int_0^1 e^x(1-x) dx$$

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

3. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1 - x$ sont C^1 sur $[0, 1]$. Utilisons une intégration par parties pour déterminer $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x(1-x)dx &= [e^x(1-x)]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \\ \int_0^1 e^x(1-x)dx &= [e^x(2-x)]_0^1 = e - 2. \\ \boxed{\int_0^1 e^x(1-x)dx = e - 2.} \end{aligned}$$

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de deux jeux présents dans une fête foraine.

3.1. Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.

1. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

- a. X_N représente le nombre de succès (gagner une partie) d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, X_N suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{1}{10})$ d'espérance $E(X) = \frac{N}{10}$, de variance $V(X) = \frac{9N}{100}$.
- b. Le joueur a misé N fois un euro et a gagné $3 X_N$ euros. On a donc bien

$$Y_N = 3X_N - N.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_N) = 3E(X_N) - N = \frac{3N}{10} - N = -\frac{7N}{10}$$

2. Une seconde personne joue jusqu'à ce qu'elle gagne pour la première fois une partie, et s'arrête alors de jouer.

- a. La variable aléatoire Z représentant le nombre de parties jouées suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{10}$.

$$\boxed{Z \rightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{10})}$$

- b. Le joueur a misé Z fois et gagné une fois, donc $T = 3 - Z$ et donc $E(T) = 3 - E(Z) = 3 - 10 = -7$.

3. Les deux joueurs peuvent-ils espérer le même gain lorsque $E(T) = E(Y_N)$:

$$-\frac{7N}{10} = -7 \text{ soit } N = 10$$

3.2. Deuxième jeu.

1. On considère une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Un joueur lance une fléchette sur cette cible. On note D la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la cible. On suppose que D est une variable à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

- a. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf au point $x = 1$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$$

f est bien une densité de probabilité.

- b. Déterminons l'espérance de D .

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}$$

- c. La fonction de répartition F de D est définie par :

$$\begin{cases} \forall x < 0 & F_X(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1] & F_X(x) = \int_0^x 2t dt = [t^2]_0^x = x^2 \\ \forall x > 1 & F_X(x) = 1 \end{cases}$$

- d. La probabilité de l'événement $A = \text{"la fléchette n'atteint pas la cible"}$ est nulle car $p(A) = 1 - F_X(1) = 0$.

2. Un joueur se présente au stand de tir et lance trois fléchettes sur la cible décrite à la question précédente. Le joueur gagne si les trois fléchettes sont à une distance du centre O inférieure à $\frac{1}{2}$. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note D_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de la $i^{\text{ème}}$ fléchette au centre O . On suppose que ces trois variables D_1, D_2, D_3 sont indépendantes et suivent la même loi que D .

- a. Probabilité de l'événement $\left[D_i \leq \frac{1}{2} \right]$:

$$P\left[D_i \leq \frac{1}{2}\right] = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

- b. Probabilité de l'événement $G = \text{"le joueur gagne la partie"}$.

$$P(G) = P\left[\left(D_1 \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(D_2 \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(D_3 \leq \frac{1}{2}\right)\right] \underset{\text{Par indépendance}}{=} \left(P\left[D_1 \leq \frac{1}{2}\right]\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

RAPPORT

Ce sujet était bien adapté à la voie technologique et couvrait largement le programme de cette classe. Peu de questions bloquaient les candidats dans la suite des exercices. On trouvait à la fois des questions classiques et d'autres demandant plus de technicité ou de subtilité.

EXERCICE 1

C'est l'exercice le mieux traité. Les questions de la seconde partie posent cependant beaucoup de problèmes : un certain nombre de candidats ne connaissent pas la formule des probabilités totales, ce qui les empêche de terminer l'exercice. On trouve aussi beaucoup d'erreurs sur la récurrence de la question 4 : Les étudiants ne comprennent pas que le rang qui suit $2n$ est $2n+2$. On trouve dans les mauvaises copies de graves erreurs sur le calcul matriciel : le produit matriciel n'est pas commutatif !

EXERCICE 2

L'exercice a été réussi de façon très hétérogène. Les candidats essaient pourtant de le traiter dans sa totalité. On rappelle qu'il est insuffisant de justifier un résultat sur les limites en invoquant uniquement la prépondérance de fonctions : il fallait ici développer l'expression de la fonction pour conclure. Les variations de fonctions sont souvent mal justifiées. L'initialisation de la question 6 n'était pas évidente comme l'ont cru les étudiants. Les questions 4 et 7 de la partie 2 étaient les plus difficiles et peu de candidats les réussissent. Dans la partie 3, on trouve bon nombre d'erreurs sur l'expression de l'aire au moyen d'une intégrale : certaines portant sur les bornes, d'autres sur la fonction à intégrer.

EXERCICE 3

Cet exercice couvrait une large partie du programme puisqu'il y avait des variables discrètes et continues et était parfaitement adapté à la voie technologique, pourtant comme chaque année, certains le négligent. Les justifications sur la loi binomiale et géométrique restent souvent trop générales : les élèves récitent un cours sans l'adapter à la situation de l'exercice. Beaucoup n'ont pas repéré à la question 3 de la partie 1 le mot "espérer" et n'ont pas égalisé les espérances de T et Y_n . La justification de la densité est souvent trop rapide (la continuité est citée sur R alors qu'il y avait un problème en 1) et les calculs de la fonction de répartition manquent de rigueur.

CONCLUSION

Les résultats sont assez contrastés : on trouve des copies de très bonne qualité, concernant des élèves ayant travaillé régulièrement et qui arrivent à faire un certain nombre de questions et enfin les autres qui ont un niveau plus que faible (Ces candidats n'ont pas assimilé les techniques de base et ne connaissent pas les résultats principaux du cours).

Avec un écart-type de **5,08** une moyenne générale de **10,18**, cette épreuve a permis de classer les candidats.