écricome

CONCOURS D'ADMISSION 2009

3

Mathématiques

Option Technologique

Jeudi 14 mai 2009 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

1. EXERCICE.

1.1. Système linéaire de deux suites récurrentes.

On note A, P, D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit les suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 0, y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -4x_n \end{cases} \end{cases}$$

et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Vérifier que l'on a :
$$D = P^{-1}AP.$$
2. Donner, sans démonstration, l'expression de D^n pour n entier naturel .
3. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que pour tout entier naturel n :
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
4. Vérifier que pour tout entier naturel n :
$$U_{n+1} = AU_n.$$
5. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$U_n = A^nU_0.$$
En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

1.2. Puissance d'une matrice.

Soient B et I_3 les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $B^2 = 5B - 4I_3$.
2. Pour n entier naturel on définit la propriété $\mathcal{H}_n$ par :

$$\mathcal{H}_n \text{ : Il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que : } B^n = a_n B + b_n I_3.$$

   a. Montrer que les propriétés $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont vraies et déterminer les couples (a_0, b_0), (a_1, b_1) et (a_2, b_2) correspondants.

   b. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n fixé non nul, montrer que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   c. Utiliser la première partie de l'exercice pour exprimer a_n, b_n en fonction de n.

   d. Conclure en donnant l'écriture matricielle de B^n.

2. EXERCICE.

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal et on rappelle que $e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2.1. Allure de $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.
2. Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[\,,]1, +\infty[$.
3. Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

Tournez la page s.v.p.

4. On note B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   a. Calculer l'ordonnée de B.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation : $y = 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1$. passe par les points A et B.

5. On admet que la fonction f est convexe sur $[0, 1[$ et concave sur $]1, +\infty[$. Que peut-on en déduire sur les positions relatives de $\mathcal{C}_f$, de (D), et de (T) sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$?

6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ en traçant sur le même schéma les droites (D) et (T).(On donne $f(\frac{1}{2}) \simeq 1,2$ et on prendra 3 cm pour unité).

2.2. Encadrement de la valeur d'une intégrale.

On se propose dans cette partie de déterminer des encadrements de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

On ne cherchera jamais à calculer cette intégrale.

1. Interpréter l'intégrale I en terme d'aire d'un domaine que l'on hachurera sur le schéma de la question 2.1.6.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

   En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3. Prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$

En déduire que :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx.$$

4. Effectuer une intégration par parties, pour calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx.$$

5. En utilisant la question 2.2.2., montrer que :

$$\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \leqslant \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

En déduire un nouvel encadrement de I.

6. En utilisant la considération géométrique de la question 2.1.5, justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left[2(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1)x + 1\right] dx.$$

En déduire un dernier encadrement de I.

3. EXERCICE.

Une municipalité a lancé une étude statistique concernant les problèmes rencontrés par les usagers des transports en commun.

3.1. Partie 1.

L'enquête révèle que la probabilité qu'un usager attende moins de 7 minutes à une station donnée est égale à p, p appartenant à $]0,1[$.

1. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

Tournez la page s.v.p.

a. On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance en fonction de p.

b. On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
Déterminer, en fonction de p, la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.

2. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
-Le premier jour, il prend le bus.
-Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
-Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.
On note p_n la probabilité de l'événement B_n = "Monsieur Thurman prend le bus le jour n".

a. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(B_n, \overline{B_n})$ pour montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = (p - \frac{1}{2})p_n + \frac{1}{2}.$$

b. Soit α le réel vérifiant :

$$\alpha = (p - \frac{1}{2})\alpha + \frac{1}{2}.$$

Montrer que la suite $(p_n - \alpha)$ est géométrique, et en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = (p - \frac{1}{2})^{n-1}(1 - \alpha) + \alpha.$$

c. La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

3. L'étude effectuée a permis de montrer que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut se représenter par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 4)$.

a. Exprimer la probabilité q que le retard soit inférieur à 7 minutes en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

b. A l'aide de la table donner une valeur approchée de q.

3.2. Partie 2.

Le temps passé chaque jour dans les transports en commun, par Monsieur Thierex, exprimé en heures. est une variable aléatoire réelle T dont une densité g est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 \text{ si } t < 0. \\ g(t) = t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ g(t) = 2 - t \text{ si } 1 < t < 2 \\ g(t) = 0 \text{ si } t \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Représenter la fonction g puis montrer que g est bien une densité de probabilité.
2. Calculer les probabilités suivantes :

$$P[T \leqslant 1], \quad P[T \leqslant 1,5].$$

3. Déterminer la valeur de l'espérance de T. Que représente cette valeur ?

Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{t^2}{2})dt$$

Par exemple $\Phi(0,67)=0,7468$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817