EXERCICE 1

On considère les matrices carrées A, I, O et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - 3I\ .$$

1. (a) Calculer B, B^2, B^3.

   (b) En déduire B^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.

2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$A^n = 3^n\left(I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2\right).$$ Est-ce encore vrai pour $n \in \{0, 1\}$?

3. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in N}$, $(v_n)_{n\in N}$, $(w_n)_{n\in N}$ définies par leurs premiers termes $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par les relations :

   $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n$; $v_{n+1} = u_n + 3v_n$; $w_{n+1} = -u_n + 3w_n$.

   On note pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

   (c) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n, w_n en fonction de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in N}$, $(v_n)_{n\in N}$, $(w_n)_{n\in N}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

1. (a) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

   (b) Déterminer la nature de la branche infie de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

   (c) Pour tout x réel, montrer que $f'(x) = -(1-x)^2 e^{-x}$.
   Dresser le tableau des variations de f.

   (d) Calculer $f'(0)$, $f'(1)$ puis utiliser ces valeurs pour tracer dans un repère orthonormé d'unité 5 cm la courbe représentative de f. Faire figurer aussi la droite d'équation $y = x$.
   On utilisera également les valeurs approchées : $f(1) \approx 0{,}7$ et $f(\frac{1}{2}) \approx 0{,}8$.

On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.

2. (a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Etablir que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution , notée α . Montrer que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}\,;1]$.

3. (a) Montrer que pour tout réel x de $[\frac{1}{2}\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[\frac{1}{2}\,;1]$.

   (b) Montrer que pour tout réel x de $[\frac{1}{2}\,;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

   En déduire que pour tout réel x de $[\frac{1}{2}\,;1]$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Montrer grâce à la question 3 (a) que pour tout entier naturel n , $u_n \in [\frac{1}{2}\,;1]$.

   (b) Montrer par récurrence et grâce à la question 3 (b) que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

   (c) Construire sur le graphique établi en 1.(d) les abscisses u_0 , u_1 , u_2 .

EXERCICE 3

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.

L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 20 boules dont une rouge et 19 blanches .

L'urne $\mathcal{U}_2$ contient 20 boules dont 3 rouges et 17 blanches .

On désigne par " partie" le protocole suivant :
On choisit une urne de manière équiprobable , puis on tire une boule de cette urne et on note sa couleur , enfin on remet la boule tirée dans l'urne dont elle provient .

1. Ici on effectue une seule partie et on s'intéresse à l'évènement R : " la boule tirée est rouge " .

   (a) Montrer que $P(R) = \frac{1}{10}$.

   (b) Supposons avoir tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne $\mathcal{U}_1$?

2. Dans cette question le joueur effectue non pas une mais 40 parties .

   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il a obtenu la couleur rouge au cours de ces 40 parties .

   (a) Déterminer la loi de X .
   On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.

   (b) En moyenne , combien de fois le joueur obtiendra-t-il la couleur rouge en 40 parties ?

(c) On considère que l'on peut approcher X par une variable Z qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Justifier que le paramètre de cette loi est $\lambda = 4$.
En utilisant cette approximation et en vous aidant de la table fournie, déterminer une valeur approchée de la probabilité que le joueur ait obtenu au moins deux fois la couleur rouge au cours de ces 40 parties.

3. Dans cette question le joueur répète les parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne la couleur rouge pour la 1[ère] fois.

Soit Y le rang de la partie où il obtient pour la 1[ère] fois la couleur rouge.

(a) Déterminer la loi de Y.
On précisera en particulier $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout k de $Y(\Omega)$.

(b) Préciser son espérance et sa variance.

Table de la loi de Poisson de paramètre 4 :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Z = k)$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	0,104

EXERCICE 4

1. *Préliminaire* :

On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Rappeler la densité usuelle de la variable Y ainsi que $E(Y)$ et $V(Y)$.

(b) En déduire la nature et la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

On considère maintenant et dans toute la suite de l'exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ f(t) = t e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.

(b) En utilisant le préliminaire, montrer que f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire de densité f.

3. (a) Montrer que la fonction de répartition F de X est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ F(x) = 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Calculer les valeurs de $P(X \leq 2)$, $P_{X \leq 2}(X > 1)$.

4. (a) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout réel x positif :
$$\int_0^x t^2 e^{-t} dt = -x^2 e^{-x} + 2\int_0^x t e^{-t} dt.$$

(b) En déduire grâce au préliminaire que $E(X)$ existe et que $E(X) = 2$.