294

ESC__MATT

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Conception : E.S.C. CHAMBERY

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Mardi 11 mai 2010, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer la matrice $N = A - I$, puis calculer N^2 et N^3.
Sans récurrence , donner la valeur de N^k lorsque $k \geq 3$.

(b) Montrer alors en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme , que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette formule est-elle encore valable lorsque $n = 0$? lorsque $n = 1$?

2. (a) Par la méthode du pivot , justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse .

(b) La formule de la question 1.(b). est-elle encore valable lorsque $n = -1$?

On essaie maintenant de déterminer l'expression des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1 \text{ et } z_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

3. (a) De quel type est la suite (z_n) ?
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de z_n .

(b) En déduire alors le type de la suite (y_n) puis donner , pour tout entier naturel n , l'expression de y_n en fonction de n.

4. Pour tout entier naturel n , on pose : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Préciser X_0 et montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0$.

(c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}\ , u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$

ainsi que la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(t) = t\,(1-t)$.

1. (a) Etablir le tableau des variations de f.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [\,0\,;\frac{1}{2}\,]$.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente . On note ℓ sa limite .

   (d) Justifier que $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge à la fois vers ℓ et vers $\ell\,(1-\ell)$.
   En déduire $\ell = 0$.

2. On définit pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{\,2}$.

   (a) Pour tout entier naturel k, exprimer $u_k - u_{k+1}$ en fonction de u_k .

   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \frac{1}{2} - u_n$.

   (c) On note pour tout entier naturel k : $p_k = 2\,u_k^{\,2}$.
   Montrer que la suite $(\,p_k\,)_{k\in\mathbb{N}}$ est une loi de probabilité .

EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée .
On lance le dé et on observe son résultat :

Si celui-ci est un 6 , on lance la pièce deux fois .
Dans tous les autres cas , on lance la pièce une seule fois .

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé .
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience .

1. (a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail .

   (b) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Montrer que $P(\,Y = 2\,) = P(\,Y = 2 \cap X = 6\,) = \frac{1}{24}$.

3. (a) Montrer que pour $k \in \{1,2,3,4,5\}$, $P_{X=k}(\,Y = 0\,) = \frac{1}{2}$.

   (b) Que vaut $P_{X=6}(\,Y = 0\,)$? En déduire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(Y = 0) = \frac{11}{24}$.

   (c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance .

4. (a) Recopier et compléter les cases du tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X, Y) (Aucune justification supplémentaire n'est demandée) .

Y \ X	1	2	3	4	5	6
0						
1						
2						

(b) Calculer alors la covariance de X et Y .

EXERCICE 4

Soit f la fonction réelle définie par : $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ ou } t > 2 \\ f(t) = \frac{1}{2}t & \text{si } t \in]0\,;2] \end{cases}$

1. (a) Montrer que f est continue en 0 . Montrer que f est une densité de probabilité.

   (b) On note désormais X une variable de densité f , et on note F sa fonction de répartition . Rappeler l'intégrale permettant de calculer $F(x)$ en fonction de la densité f.
   Calculer $F(x)$ en séparant les cas $x \leq 0$, $0 < x \leq 2$ et $x > 2$.

   (c) Calculer la probabilité $P(X \leq 1)$ et la probabilité $P(\frac{1}{2} < X \leq 1)$.

   (d) Justifier que $X(\Omega) =]0\,;2]$.

2. Déterminer l'espérance de X .

Soient U la variable aléatoire définie par $U = X^2$ et G sa fonction de répartition.

3. Déterminer $U(\Omega)$ puis justifier que si $x \leq 0$, $G(x) = 0$ et si $x > 4$, $G(x) = 1$.

4. (a) Justifier l'égalité des événements $(U \leq 2)$ et $(-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2})$, puis en déduire $G(2)$.

   (b) Plus généralement , montrer que si $0 < x \leq 4$, $G(x) = \frac{1}{4}x$.

   (c) Dresser un bilan pour la fonction G puis reconnaître la loi de U.

   (d) En déduire l'espérance $E(U)$ puis la valeur de la variance de X .