



**BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES**

**CONCOURS D'ADMISSION DE 2011**

Code épreuve :

**294**

**Conception : E.S.C. CHAMBERY**

---

**OPTION TECHNOLOGIQUE**

**MATHEMATIQUES**

Mardi 10 mai 2011, de 14 h. à 18 h.

---

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## EXERCICE 1

On note :  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

1. (a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
- (b) Vérifier que  $M = PDP^{-1}$ .

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées **A**, **B** et **C**.

On considère que si le jour  $n$  le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.

Le premier jour ( c'est-à-dire le jour 1 ), le client choisit l'activité **B**.

On notera  $A_n$  ( respectivement  $B_n$ ,  $C_n$  ) l'événement: " le client choisit l'activité **A** le jour  $n$  " ( respectivement **B**, **C** ) et on notera  $a_n$  ( respectivement  $b_n$ ,  $c_n$  ) sa probabilité.

On définit également la matrice  $U_n$  par :  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ , ainsi  $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

2. (a) Par une formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $U_{n+1} = MU_n$ .
- (b) En utilisant la relation établie en 1.(b), en déduire par récurrence que,

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } U_n = \frac{1}{3} P D^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul, 
$$\begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$
.

## EXERCICE 2

Dans tous les calculs et expressions, la lettre "  $e$  " désigne l'exponentielle de 1. On donne  $e \approx 2,7$ .

1. (a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $x^2 - x.e + e > 0$ .
- (b) On note pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = 2x^2 - (2e).x + e^2 - 2e$ .

Calculer les racines de  $P$ , notées  $\alpha$  et  $\beta$ , et en déduire le signe de  $P(x)$  en fonction des différentes valeurs de  $x$ .

On considère alors la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - \ln(x^2 - x.e + e)$ .

On admettra sans le justifier que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

2. (a) Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(e-1)$  et  $f(e)$ . Vérifier que  $f(\frac{e}{2}) = -\ln(1 - \frac{e}{4})$ .  
Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - (b) Calculer  $f'(x)$ , puis étudier son signe. Vérifier que  $f'(0) = 1$  et  $f'(e) = -1$ .
  - (c) En utilisant  $e \approx 2,7$ , ordonner les nombres  $0, 1, e-1, e, \frac{e}{2}$  puis dresser le tableau des variations de  $f$  en faisant figurer les valeurs étudiées en 2.(a).
3. Vérifier que  $f''(x) = \frac{P(x)}{(x^2 - x.e + e)^2}$  et en déduire grâce au 1.(b) les points d'inflexion de  $C_f$ .
4. Donner l'allure de  $C_f$  dans un repère orthonormé d'unité 5 cm, en faisant figurer les résultats obtenus aux questions précédentes. ( On donne  $f(\frac{e}{2}) \approx 1,1$  ;  $\alpha \approx 0,4$  ;  $\beta \approx 2,3$  ).

### EXERCICE 3

Un opérateur téléphonique propose trois forfaits :  
Le forfait n°1 coûte 10 € par mois  
Le forfait n°2 coûte 20 € par mois  
Le forfait n°3 coûte 30 € par mois.

Un groupe de  $n$  clients se rend dans une boutique de cet opérateur et chacun achète un de ces trois forfaits au hasard, avec équiprobabilité et sans être influencé par les choix des autres clients.

On note les variables aléatoires :

$X_1$ , égale au nombre de clients parmi ces  $n$  clients ayant choisi le forfait n°1

$X_2$ , égale au nombre de clients parmi ces  $n$  clients ayant choisi le forfait n°2

$X_3$ , égale au nombre de clients parmi ces  $n$  clients ayant choisi le forfait n°3.

$H$ , somme globale mensuelle en euros versée par ces  $n$  clients à l'opérateur.

1. (a) Justifier que  $X_1$  suit une loi usuelle que l'on détaillera, en précisant  $X_1(\Omega)$  et l'expression de  $P(X_1 = k)$  pour tout entier  $k \in X_1(\Omega)$ .
  - (b) Donner les valeurs de l'espérance  $E(X_1)$  et de la variance  $V(X_1)$ .
  - (c) Justifier que les variables  $X_2$  et  $X_3$  suivent la même loi que  $X_1$ .
2. (a) Justifier que  $X_1 + X_2 = n - X_3$  et en déduire la variance de  $X_1 + X_2$ .
- (b) En déduire  $\text{cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$ . Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?
3. Exprimer  $H$  en fonction des variables  $X_1, X_2$  et  $X_3$  puis montrer que  $E(H) = 20n$ .

## EXERCICE 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ .

- En séparant les cas  $x < 0$  et  $x \geq 0$ , calculer l'expression  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ .
  - De quelle loi usuelle reconnaît-on la fonction de répartition et la densité ?

On considère dès lors une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$  et de densité  $f$ , et on définit la variable aléatoire  $Y$  par la relation :  $Y = \frac{1}{2} X$ .

- Donner l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ . En déduire  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .
  - Montrer que  $Y$  admet pour fonction de répartition la fonction  $G$  donnée par :
$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-2y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$
  - En déduire que  $Y$  suit une loi usuelle et en donner une densité  $g$ .

Dans toute la suite de l'exercice la fonction  $g$  désigne la densité usuelle de  $Y$ .

- Dans le cadre du suivi des coupures d'électricité dans une ville donnée, on s'intéresse à la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(t) = 2f(t) - g(t)$ .

- Vérifier que  $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ .
- Montrer que  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et positive sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $h$  est une densité.

On considère alors une variable aléatoire  $Z$  de densité  $h$ , modélisant le temps d'attente en heures après une coupure d'électricité jusqu'à rétablissement du courant.

- Montrer que  $E(Z) = 2E(X) - E(Y)$ .  
En déduire le temps moyen s'écoulant avant le rétablissement du courant.
  - Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} e^{-t} - e^{-2t} dt$  et en déduire que  $P(Z \leq \ln 2) = \frac{1}{4}$ .