Code épreuve : 294

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : Chambéry Savoie

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Vendredi 10 mai 2013, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère aussi les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et les relations :

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = 2b_n, \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n.

2. Justifier que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite remarquable. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n.

   Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n.

   a) Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et donner son premier terme.
   b) En déduire une expression de c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = n2^{n-1}$.

4. En déduire les quatre coefficients de M^n pour tout entier naturel n.

5. **Application au calcul d'une somme**

   a) Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

   $$a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k, \text{ pour tout entier naturel } k$$

   b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.

   c) Pour tout entier naturel n, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

   d) Déduire des questions précédentes et de 3.c) que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice**

   On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer en utilisant la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b) Vérifier que $P^{-1}AP = M$.
   c) Etablir que $P^{-1}A^nP = M^n$, pour tout entier naturel n. En déduire les 4 coefficients de A^n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau des variations de f. On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. *On donne* $\ln(2) \simeq 0,7$.

3. Etablir que f est concave sur $]0, +\infty[$.

4. a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

   b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0, +\infty[$.

5. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0, +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.

   b) Justifier que $\beta \in]1, 2[$.

6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$. *On donne* $\alpha \simeq 0,06$ *et* $\beta \simeq 1,79$.

Exercice 3

Une entreprise fabrique en série des balles de ping-pong à l'aide de deux machines A et B. La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B.

Certaines balles fabriquées présentent un défaut. C'est le cas pour 12% des balles fabriquées par la machine A et pour 9% de celles fabriquées par la machine B.

A la sortie des machines les balles arrivent dans le désordre sur un tapis roulant. Ce qui fait que si l'on prend une balle au hasard à la sortie du processus de fabrication, la probabilité qu'elle provienne de A est $\frac{1}{3}$ et celle qu'elle provienne de B est $\frac{2}{3}$.

Partie I

1. a) On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard. On définit les événements :

   - A : la boule provient de la machine A ;
   - B : la boule provient de la machine B ;
   - D : la balle prélevée présente un défaut.

   Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(D) = \frac{1}{10}$.

   b) On constate que la balle prélevée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

2. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles défectueuses prélevées.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Donner les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.

   b) Déterminer, en fonction de n, les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $n = 30$. On admet que dans ce cas, on peut approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

   a) Quelle doit être la valeur du paramètre λ ?

   b) Préciser les valeurs prises par Y et pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(Y = k)$.

c) On donne dans le tableau suivant les valeurs de $P(Y = k)$ lorsque Y suit une loi de Poisson pour certains paramètres λ.

Déterminer une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins une balle présentant un défaut parmi les 30 balles prélevées.

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$0,3679$	$0,3679$	$0,1839$	$0,0613$	$0,0153$	$0,0031$	$0,0005$	$0,0001$
2	$0,1353$	$0,2707$	$0,2707$	$0,1804$	$0,0902$	$0,0361$	$0,0120$	$0,0034$
3	$0,0498$	$0,1494$	$0,2240$	$0,2240$	$0,1680$	$0,1008$	$0,0504$	$0,0216$

2. On suppose dans cette question que $n = 3600$. On admet que l'on peut alors approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Z suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

   a) Déterminer les paramètres m et σ de la loi Z pour que X et Z aient la même espérance et la même variance. *On donne* $324 = 18^2$.

   b) On admet qu'alors $\dfrac{Z - m}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer en utilisant la table ci-dessous la probabilité qu'il y ait au moins 396 balles défectueuses parmi les 3600 balles prélevées.

Valeurs de $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ *pour certaines valeurs de* x.

x	$1,5$	$1,6$	$1,7$	$1,8$	$1,9$	2	$2,1$	$2,2$	$2,3$
$\Phi(x)$	$0,9332$	$0,9452$	$0,9554$	$0,9641$	$0,9713$	$0,9772$	$0,9821$	$0,9861$	$0,9893$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ f(t) = 2e^{-2t+2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

1. a) Calculer, pour tout réel $A \geq 1$, $I_A = \displaystyle\int_1^A e^{-2t} dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} I_A$.

   b) Etablir que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant f comme densité de probabilité.

2. Montrer que la fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad F(x) = 1 - e^{-2x+2} \text{ si } x \geq 1$$

3. a) Calculer les probabilités : $P(X \geq 2)$, $P(X \leq 3)$, $P(2 \leq X \leq 3)$.

   b) Calculer $P_{(X \geq 2)}(X \leq 3)$.

4. Soit A un réel supérieur ou égal à 1. On pose $J_A = \displaystyle\int_1^A te^{-2t} dt$.

   a) Calculer J_A en faisant une intégration par parties.

   b) Calculer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} J_A$. *On admettra que* $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} Ae^{-2A} = 0$.

   c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

5. On considère la variable aléatoire $Y = X - 1$. On note G sa fonction de répartition.

   a) Montrer que pour tout réel y, $G(y) = F(y + 1)$.

   b) En déduire l'expression de $G(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geq 0$.

   Justifier que G est la fonction de répartition d'une loi usuelle que l'on précisera.

   c) Calculer $V(Y)$.

   d) Déduire des questions précédentes que X admet une variance et la calculer.

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1250 – D'après documents fournis