BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : INSEEC Paris Bordeaux Alpes-Savoie

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 9 mai 2014, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{20}N$.

On pose : $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

1. Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que : $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.
2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = \frac{1}{8}$, $b_0 = -\frac{1}{8}$ et les relations :

$$a_{n+1} = 12a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 4b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $N^n = a_nA + b_nB$.

   b) Quel est le type des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Déterminer, pour tout entier naturel n, des expressions de a_n et de b_n en fonction de n.

   c) Montrer que : $M^n = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n A - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n B$ pour tout entier naturel n.

3. Un particulier a acheté une poule. La poule pond chaque semaine entre 0 et 3 œufs. Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine (elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes). On note pour tout entier n non nul,

   - U_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond un œuf » ;
   - D_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond deux œufs » ;
   - T_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond trois œufs ».

   On note u_n, d_n et t_n leurs probabilités respectives. On suppose que la première semaine la poule pond un œuf puis que pour tout entier n non nul, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} &= \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} &= \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$

   On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

   a) Justifier que : $X_{n+1} = MX_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

   b) Montrer que : $X_n = M^{n-1}X_1$, pour tout entier $n \geq 1$.

   c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \; ; \; d_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

   d) Que représente le nombre $1 - (u_n + d_n + t_n)$?

   e) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n + 2d_n + 3t_n = \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} - \dfrac{7}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et calculer sa valeur. Que représente ce nombre ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$. On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une droite asymptote $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Justifier que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

   On donne $e \simeq 2,7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. *On donne* $\alpha \simeq 1,84$ *et* $\beta \simeq -1,14$.

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - e^{-x}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.

   b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.

   Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

   c) Etablir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{e}$.

   d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$ pour tout entier naturel n.

   e) Montrer par récurrence que : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{e^n}$ pour tout entier naturel n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elle souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. a) Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $P(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.

   b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

   c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.

2. a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.

   b) En déduire la probabilité $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.

c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.

3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après 2.c) on a $P(Z=1)=\frac{1}{81}$.

   Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.

4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

   a) Justifier que $P(Y_1=0)=P(X_1=0)$.

   b) En déduire $P(Y_1=1)$ puis $E(Y_1)$.

   On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.

   c) Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $E(Z)$ et vérifier que $E(Z)=\frac{211}{81}$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t)=(n+1)(n+2)t^n(1-t) \text{ si } t\in[0,1] \text{ et } f_n(t)=0 \text{ sinon}$$

1. a) Vérifier que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer $\int_0^1 t^n(1-t)dt$.

   c) En déduire que f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on utilisera les fonctions f_n pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

2. Madame A doit se rendre de Paris à Londres en train. Le haut-parleur de la gare annonce pour son train un retard de moins d'une heure. On admet que la variable aléatoire X égale à la durée (en heures) du retard admet pour densité de probabilité la fonction f_1. C'est-à-dire :

$$f_1(t)=6t(1-t) \text{ si } t\in[0,1] \text{ et } f_1(t)=0 \text{ sinon}$$

   Soit F_1 la fonction de répartition de X.

   a) Déterminer l'expression de $F_1(x)$ lorsque $x<0$ puis lorsque $x>1$. Justifier que pour tout $x\in[0,1]$, $F_1(x)=3x^2-2x^3$.

   b) Quelle est la probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard ?

   c) Quelle est la probabilité que le train ait un retard compris entre un quart d'heure et une demi-heure ?

   d) Le haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. Quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure ?

3. a) Vérifier que $tf_1(t)=\frac{1}{2}f_2(t)$ pour tout réel t. En déduire l'espérance de X.

   b) Exprimer $t^2f_1(t)$ en fonction de $f_3(t)$ pour tout réel t. En déduire $E(X^2)$ puis $V(X)$.

4. Une fois que le train arrive à Paris, il continue à prendre du retard sur le chemin entre Paris et Londres. On nomme Y la variable aléatoire égale au retard en heures pris par le train durant ce trajet. On suppose que Y admet pour densité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t)=\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} \text{ si } t\in[0,+\infty[\text{ et } g(t)=0 \text{ sinon}$$

   a) De quelle loi usuelle reconnaissez-vous une densité ? Calculer $E(Y)$.

   b) Soit Z le retard total que cumule le train en arrivant à Londres. Exprimer Z en fonction de X et de Y. En déduire la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1245 – D'après documents fournis