

**RAPPORT DE CORRECTION**  
**DE MATHÉMATIQUES Option S**  
**Conception HEC Paris – ESSEC BS**

# SOMMAIRE

<b>le sujet</b>	<b>2</b>
<b>Attentes du jury</b>	<b>8</b>
<b>Remarques de correction</b>	<b>9</b>
<b>Conseils aux futurs candidats</b>	<b>10</b>

Conception : HEC Paris – ESSEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 30 avril 2019, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

Le problème comporte cinq parties.

Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices  ${}^tAA$  où  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  à l'ensemble des matrices orthogonales de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Dans tout le problème :

- $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .
- Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , on lui associe la matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de ses coordonnées dans la base  $B_0$ .

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  et la norme euclidienne qui lui est associée est notée  $\| \cdot \|$ .
- Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tA$  désigne sa transposée et  $\text{tr } A$  désigne sa trace.
- $I_n$  désigne la matrice unité de  $M_n(\mathbb{R})$  et  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^n$ .

• **Endomorphisme adjoint** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et si  $f$  est l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , on note  $f^*$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  ${}^tA$ . On notera aussi  $s_f = f^* \circ f$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  ${}^tAA$ .

• Si  $\lambda$  est un nombre réel, on définit

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \quad \text{et} \quad E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

• **Liste étendue des valeurs propres** Lorsqu'une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable, on appelle liste étendue des valeurs propres de  $A$ , une liste de nombres réels où chaque valeur propre  $\lambda$  de  $A$  se trouve répétée  $\dim E_\lambda(A)$  fois. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

admet  $(1, 4, 4)$  pour liste étendue des valeurs propres.

•  $S(\mathbb{R}^n)$  (respectivement  $S_n(\mathbb{R})$ ) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $\mathbb{R}^n$  (respectivement des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{R})$ ).

•  $S^+(\mathbb{R}^n)$  (respectivement  $S_n^+(\mathbb{R})$ ) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $\mathbb{R}^n$  (respectivement des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{R})$ ) à valeurs propres positives ou nulles.

• On note  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $M_n(\mathbb{R})$ . Si  $P \in M_n(\mathbb{R})$ , on rappelle que  $P$  est une matrice orthogonale si  $P$  est inversible et si  $P^{-1} = {}^tP$ .

• **Matrices définies par bloc** Considérons  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$  définies par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

où

$$(A_1, B_1) \in (M_r(\mathbb{R}))^2 \quad ; \quad (A_4, B_4) \in (M_{n-r}(\mathbb{R}))^2,$$

et

$$(A_2, B_2) \in (M_{r, n-r}(\mathbb{R}))^2 \quad ; \quad (A_3, B_3) \in (M_{n-r, r}(\mathbb{R}))^2.$$

On utilisera sans démonstration les égalités suivantes

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ {}^tA_2 & {}^tA_4 \end{bmatrix}.$$

### Partie I - Un premier exemple

Soit  $a$  un réel différent de 1 et

$$A = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

1) Quel est le rang de  $A$ ? Calculer  $A^2$ . Que peut-on dire de l'endomorphisme  $f$  canoniquement associé à  $A$ ? Est-ce un endomorphisme diagonalisable? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ ?

2) Calculer  $M = {}^tAA$ . La matrice  $M$  est-elle diagonalisable? Comparer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(s_f)$ . Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $s_f$ ?

3) À quelle condition nécessaire et suffisante,  $M$  est-elle la matrice d'un projecteur?

### Partie II - Généralités

4) Produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$

*a* - Soit

$$A = [a_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \quad \text{et} \quad B = [b_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ . Donner l'expression de  $\text{tr}({}^tAB)$  en fonction des coefficients de  $A$  et de  $B$ .

*b* - Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$  est un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

Dans la suite du problème, on notera

$$(A | B) = \text{tr}({}^tAB) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$$

la norme euclidienne associée.

c - Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr} A^2 \leq \text{tr}({}^tAA).$$

Montrer également que

$$\text{tr} A^2 = \text{tr}({}^tAA) \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R}).$$

Dans la suite,  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $f$  est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

5) Caractérisation de la matrice de  $f^*$  en base orthonormée

Soit  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $P$  la matrice de passage de  $B_0$  vers  $B'$  et  $A'$  la matrice de  $f$  dans la base  $B'$ .

a - Rappeler la relation liant  $A$  et  $A'$ .

b - Rappeler pourquoi  $P$  est une matrice orthogonale.

c - En déduire que  ${}^tA'$  est la matrice de  $f^*$  dans la base  $B'$ .

6) Réduction de  $s_f$

a - Vérifier que, pour tout  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2$ .

b - Montrer que  $\text{Ker} f = \text{Ker}(s_f)$  et  $\text{rg}(s_f) = \text{rg} f$ .

c - Vérifier que  $s_f$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$ .

d - Montrer que les valeurs propres de  $s_f$  sont positives ou nulles.

On note  $r = \text{rg} f$  et on suppose pour la fin de la question 6) que  $1 \leq r \leq n - 1$ .

e - Justifier qu'il existe une base orthonormée  $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $s_f$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où  $D$  est une matrice diagonale d'ordre  $r$  dont les éléments diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont strictement positifs et où  $0_{r,n-r}$ ,  $0_{n-r,r}$  et  $0_{n-r,n-r}$  sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.

f - Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $C$  est de la forme

$$\text{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où  $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$  et  $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ . Vérifier que  ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$ .

7) Étude des valeurs propres de  $A{}^tA$

On note  $\tau_f = f \circ f^*$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A{}^tA$ .

a - Montrer que  $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(\tau_f)$  et  $\dim(\text{Ker}(s_f)) = \dim(\text{Ker}(\tau_f))$ .

b - Soit  $\lambda$  une valeur propre strictement positive de  $s_f$  et  $x$  un vecteur propre associé. Vérifier que  $\lambda$  est une valeur propre de  $\tau_f$  et que  $f(x)$  en est un vecteur propre associé. Montrer alors que

$$\dim(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(\tau_f)).$$

c - Montrer que  $\tau_f$  est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que  $s_f$  et que, pour chacune de ces valeurs propres  $\lambda$ , on a

$$\dim(E_\lambda(s_f)) = \dim(E_\lambda(\tau_f)).$$

d - En déduire enfin qu'il existe  $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^t A = \Omega({}^t A A) \Omega$ .

8) Une inégalité

Dans cette question, on note

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n\} \text{ et } U = \{(x_1, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[^n\},$$

et  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i.$$

On admet que  $V$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$  et que  $U$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ .

a - Montrer que

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

est une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}^n$ .

b - En déduire que  $\varphi$  admet un maximum global noté  $M$  sur  $W$ .

c - Calculer  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  lorsque  $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$ .

d - En déduire que  $M$  est le maximum de  $\varphi$  sur  $U$  sous la contrainte  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .

e - Déterminer alors la valeur du maximum  $M$  et préciser en quel vecteur de  $U$  il est atteint.

f - Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$ . On suppose que les valeurs propres de  $S$  sont positives ou nulles et on note  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  une liste étendue des valeurs propres de  $S$ . Déduire de ce qui précède que

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left( \frac{\text{tr } S}{n} \right)^n.$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité ?

g - Dans cette question, on note  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une liste étendue des valeurs propres de  ${}^t A A$ . On définit l'application  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i).$$

Montrer alors que pour tout réel  $x \geq 0$ ,

$$\Delta(x) \leq \left( \frac{\text{tr}(xI_n + {}^t A A)}{n} \right)^n = \left( \frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n.$$

### Partie III - Étude de deux cas particuliers

Dans cette partie encore,  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $f$  est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

9) On suppose dans cette question que  $f$  est un projecteur de rang  $r \in [1, n-1]$ .

a - Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme  $f$  est  $r$ .

b - On reprend les notations de la question 6) selon lesquelles

$$\text{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Vérifier que  $A_1^2 = A_1$  et que  $\text{tr}(A_1) = r$ , et en déduire la matrice  $A_1$ .

c - Montrer alors que les valeurs propres non nulles de  ${}^tAA$  sont supérieures ou égales à 1 et que  $\text{tr}({}^tAA) \geq r$ .

d - Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels  $\text{tr}({}^tAA) = r$  ?

10) On suppose dans cette question que  $f$  est une symétrie, c'est-à-dire  $f^2 = \text{Id}$ .

a. Justifier que  ${}^tAA$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $A$  et de  ${}^tA$ .

b - Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  ${}^tAA$ , alors  $1/\lambda$  est aussi une valeur propre de  ${}^tAA$  et que

$$\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}({}^tAA).$$

c - Vérifier que pour tout  $x$  réel strictement positif on a

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

puis établir l'équivalence logique

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

d - On note  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une liste étendue des valeurs propres de  ${}^tAA$ . Montrer que

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 2^n.$$

e - Quelles sont les matrices pour lesquelles  $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n$  ? Montrer que cette égalité correspond au cas où  $f$  est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces  $E_1(f)$  et  $E_{-1}(f)$  sont orthogonaux.

#### Partie IV - Décomposition polaire

Dans cette partie encore,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $f$  est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et on suppose de plus que  $A$  est inversible.

11) Montrer qu'il existe une base orthonormée  $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  et  $n$  réels strictement positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i,$$

et on pose alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i.$$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$  et  $v^2 = s_f$ .

12) Soit  $w$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$  et  $w^2 = s_f$ .

Montrer que, pour toute valeur propre  $\mu$  de  $w$ , on a  $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)$ , et montrer ensuite que

$$E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f) \quad \text{et} \quad \text{Sp}(w) = \left\{ \sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(s_f) \right\}.$$

13) En déduire qu'il existe un unique endomorphisme  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$  et  $v^2 = s_f$  et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de  $s_f$ , la matrice de  $v$  est diagonale.

14) En déduire qu'il existe une unique matrice notée  $\sqrt{{}^tAA}$  appartenant à  $S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $(\sqrt{{}^tAA})^2 = {}^tAA$ .

15) Vérifier que la matrice  $A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}$  est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple

$$(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$$

tel que  $A = \Omega S$ . C'est ce que l'on appelle la décomposition polaire de  $A$ .

**Partie V - Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$**

Dans cette partie,  $A$  est une matrice inversible de  $M_n(\mathbb{R})$ . Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . On note  $d(M)$  la distance de  $M$  à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire

$$d(M) = \inf_{V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2.$$

16) Justifier que  $d(M)$  est bien définie.

17) Soit  $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\forall N \in M_n(\mathbb{R}), \quad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.$$

Montrer que les applications  $V \mapsto VR^{-1}$  et  $V \mapsto R^{-1}V$  sont des bijections de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  sur lui-même. En déduire que

$$d(M) = d(RM) = d(MR).$$

18) On note  $A = \Omega S$  la décomposition polaire de  $A$ . On considère une matrice diagonale  $D$  à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$S = PD {}^tP.$$

Vérifier que  $d(A) = d(D)$ .

19) Soit  $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . On note

$$W = \frac{1}{2}(V + {}^tV),$$

et  $v$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $V$ .

a - Justifier que  $W$  est diagonalisable. On note  $w$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $W$ .

b - Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Vérifier que  $\langle w(x) | x \rangle = \langle v(x) | x \rangle$  et que  $\|v(x)\| = \|x\|$ . En déduire que

$$|\langle w(x) | x \rangle| \leq \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \langle x - w(x) | x \rangle \geq 0.$$

c - Montrer alors que les valeurs propres de  $I_n - W$  sont positives ou nulles.

d - On note  $W = [w_{ij}]_{(i,j) \in [1,n]^2}$ . Montrer aussi que, pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $1 - w_{ii} \geq 0$ .

e - Montrer que, pour tout  $i \in [1, n]$ , on a  $w_{ii} = 1$  si, et seulement si,  $W = I_n$ .

20) On conserve les notations des questions 18) et 19).

a - Montrer que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - V | D) = 2(I_n - W | D).$$

b - En déduire que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0.$$

c - Montrer alors que

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \|\sqrt{{}^tAA} - I_n\|_2,$$

et montrer aussi que  $I_n$  est l'unique élément  $V$  de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tel que  $d(A) = \|D - V\|_2$ .

# Le sujet

La première partie était consacrée à un exemple simple.

Dans la seconde, on étudiait des propriétés usuelles des matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , avec une dernière question où l'on obtenait une inégalité par l'examen d'un problème d'extremum sous contrainte.

La troisième partie passait en revue le cas des projecteurs et des symétries.

La quatrième partie définissait la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont positives afin d'obtenir la décomposition polaire d'une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

Dans la cinquième partie, on calculait la distance d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant certaines propriétés à l'ensemble des matrices orthogonales de  $M_n(\mathbb{R})$ .

## Les attentes du jury

Les questions étaient de difficultés variées, certaines proches du cours et d'autres demandant de l'initiative et de la réflexion. Aucune n'appelait à des développements trop longs ou trop techniques, ce qui a évité aux candidats de se fourvoyer et de s'égarer. L'ensemble a permis aux étudiants maîtrisant les connaissances exigibles et capables d'attention et de rigueur de progresser dans le problème pour montrer leurs qualités.

L'indépendance des parties permettait aux étudiants sérieux et pugnaces d'obtenir d'excellentes notes grâce à un travail approfondi sur l'ensemble du problème.

Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, présentant un nombre significatif de questions de difficultés raisonnables. Ainsi, il était conforme au programme et à son esprit.

9 %, 40 %, 18.5 %, 12 % et 20.5 %, des points du barème ont été affectés aux cinq parties décrites ci-dessus.

# Remarques de correction

Cette année encore, les copies étaient majoritairement soignées et bien présentées. L'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

L'introduction par un exemple a permis aux candidats de se mettre en jambe, même si on regrette les lourdeurs dans la recherche des vecteurs propres. Pour l'égalité des noyaux de la question 2, on a vu trop souvent les candidats se lancer déjà dans la théorie attendue à la question 6.

La partie II était la plus longue et la plus dense. Le jury a regretté un manque d'attention et de rigueur, comme à la question 4 où l'expression du produit scalaire est souvent fausse, ce qui, parfois, a amené certains à se montrer malhonnêtes en 4b. Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est méconnu et beaucoup des tentatives pour prouver l'inégalité  $Tr(A^2) \leq Tr({}^tAA)$  et son cas d'égalité ne sont que paraphrases et esbroufe.

Dans la question 5, on constate une grave méconnaissance des formules de changement de base.

Les questions 6a, b, d, e sont en général bien traitées ; Pour 6c, on rappelle que  $S_f$  est symétrique parce que sa matrice dans une BON est symétrique. La compréhension de 6f est restée l'apanage des bonnes copies. Le rang seul ne suffit pas ! Rares sont ceux qui évoquent l'égalité des noyaux.

Notons aussi que dans 6a comme plus tard dans 17, 19 et 20, il y a eu des confusions entre les deux produits scalaires (et les deux normes) ...

La question 7 a été seulement survolée la plupart du temps et on y trouve comme en 7d des affirmations péremptoires qui ne peuvent qu'être préjudiciables à l'image que le correcteur se fait du candidat.

Dans la question 8, bien maltraitée, le jury a été choqué par le fait que l'immense majorité des candidats pense en 8c que  $V \setminus U = \{0\}$ , tout comme elle croit, en 8f et 8g qu'il suffit simplement de dire que c'est une application de 8e !

Dans la partie III, question 9, non la matrice A n'est pas une diagonale de 1 et de 0 ! On ne trouvait souvent dans cette partie que l'étude de 10c.

La quatrième partie n'a pas eu beaucoup de succès hormis des réponses très partielles à 11 et à 12.

On a trouvé, en dehors des excellentes copies, seulement quelques questions traitées dans la dernière partie, telles 19a et 19b. Attention, 16 n'est pas un théorème de projection orthogonale ou de minimalisation car  $O_n(\square)$  n'est pas un sous-espace vectoriel.

## Conseils aux futurs candidats

Le sujet présentait des difficultés techniques modérées mais demandait d'avoir du recul sur le cours d'algèbre linéaire. Certaines copies font montre d'une belle maîtrise quand d'autres ont du mal à initier la moindre démonstration.

Les correcteurs renouvellent avec force leur demande exprimée dans les rapports des années précédentes : les copies doivent être propres, bien présentées. C'est majoritairement le cas, mais il persiste des copies peu soignées ou bien désagréables à lire. Attention, l'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont, avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

Il faut également éviter les encres trop pâles puisque les correcteurs travaillent maintenant sur les versions numérisées des copies.

Le barème adopté a engendré un bon étalement des notes et le sujet a permis de bien distinguer les meilleurs étudiants. Plusieurs très bonnes copies ont obtenu la note maximale.