Épreuve emlyon 2020 Voie S

Rapport de correction

1 Remarques générales

Le sujet 2020 de la voie scientifique était composé de deux parties indépendantes, un problème d'analyse de première année et un problème d'algèbre de deuxième année. Le but de l'épreuve est de vérifier chez les candidats la bonne assimilation de différentes parties du programme des deux années de classe préparatoire ECS, ainsi que de tester leurs facultés de raisonnement. Cette année, le choix avait été fait de ne pas aborder les probabilités, ce thème étant par ailleurs central dans l'épreuve Mathématiques II ; cependant cela n'indique en rien d'un choix pour les futures sessions, les concepteurs de l'épreuve emlyon s'autorisant d'utiliser l'intégralité du programme dans les sujets de cette épreuve.

Les questions se veulent de difficulté progressive dans chacune des parties, visant à évaluer les compétences des candidats dans les points suivants : en priorité elles vérifient la bonne connaissance du cours, ce qui permet à des candidats sérieux mais de niveau modeste une note loin d'être déshonorante ; elles évaluent ensuite les capacités des candidats à former des raisonnements rigoureux et argumentés, reposant sur des connaissances solides, sur des questions soit de type « classiques », soit plus délicates demandant alors un certain recul vis à vis des notions du programme.

Il n'était pas indispensable d'avoir traité la totalité du sujet pour obtenir une excellente note. Il est toujours préférable de mener un raisonnement rigoureux et complet sur seulement une moitié du sujet, plutôt que de donner tous les résultats (même justes) sur de nombreuses questions de manière trop rapide et sans explication réelle ; un tel raisonnement ne fournissant alors en général que peu de points au barème.

Sur la majorité des questions, le barème permet d'évaluer les compétences des candidats sur trois points :

- ⋆ en premier lieu, comprendre la problématique mise en jeu dans la question, à savoir bien lire la question demandée pour percevoir ce que l'on peut attendre d'eux à ce moment précis du sujet, problématiser correctement l'intitulé de la question et utiliser alors à bon escient celles qui précèdent ;
- ⋆ en second lieu, connaître et maîtriser les définitions et théorèmes du programme des deux années ECS, en donnant le cas échéant les hypothèses nécessaires ou suffisantes à leur application, dans le respect strict du cadre fixé par le programme officiel ;
- ⋆ une dernière part des questions se veut calculatoire, permettant aux candidats ayant du mal à mener des raisonnements abstraits, de pouvoir a minima mettre en application les techniques et formules vues en classe, par exemple dans les questions d'analyse.

L'épreuve contient enfin chaque année au moins une question d'informatique en langage Scilab correspondant au programme officiel ECS, avec un souci d'évaluer les compétences des candidats dans ce domaine sur des questions de type varié, d'un exercice à l'autre, d'une année à la suivante. Les questions d'informatique peuvent essentiellement être de trois formats : soit un programme complet ou non à achever et/ou interpréter (question **I.5.b.**), soit un script à écrire entièrement (question **I.5.a**), soit une utilisation de sorties graphiques pour permettre de conjecturer un résultat vérifié ensuite dans le sujet (question **I.5.c.**).

Les questions d'informatique sont en général évaluées avec une large bienveillance et représentent une part non négligeable du barème total, nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à aborder davantage ces questions qui sont dès lors bien mieux rémunérées que d'autres questions plus difficiles du sujet.

Il est attendu des candidats une certaine honnêteté intellectuelle dans leur copie : c'est une qualité essentielle recherchée par tous les correcteurs. Il est inutile de faire semblant que l'on arrive à un résultat de l'énoncé quand on a manifestement fait des erreurs de calcul. Il peut donc être utile de rappeler que de tels comportements dans les copies sont toujours repérés et très mal perçus par les correcteurs, d'autant plus sur les premières pages de la copie. En effet, ceci provoque dès lors un manque de confiance du correcteur vis à vis du candidat, ce qui mettra en doute ensuite la plupart des questions suivantes. Il est donc toujours préférable pour un candidat de mener ses calculs, et s'il voit une incohérence avec le sujet et qu'il ne trouve pas son erreur, a minima de signaler sur sa copie qu'il repère une disparité entre sa réponse et celle attendue, et qu'il admet le résultat pour continuer la suite ou qu'il pense repérer une erreur dans l'énoncé et continue alors dans ce sens. De même, les candidats qui se contentent d'énoncer les résultats sans les justifier n'obtiennent que très peu de points.

Enfin, les correcteurs s'attachent à toujours valoriser les copies qui sont bien présentées plutôt que celles qui relèvent d'un effort trop minimaliste pour mettre en valeur leurs réponses. On relève beaucoup de copies avec de nombreuses ratures par rapport aux années précédentes. La numérotation des questions abordées doit être clairement indiquée (voire le problème), et dans la mesure du possible les correcteurs apprécient que les résultats soient clairement visibles dans la copie, par exemple en les soulignant, en les encadrant (à la règle !), ou en les surlignant grâce à des couleurs. La correction des copies est dématérialisée. Les copies sont scannées (en couleur), il est donc déconseillé aux candidats d'utiliser des encres bleues très claires ou des stylos à l'encre baveuse qui peuvent rendre l'écriture difficilement lisible après le scan.

Les candidats ne faisant pas d'effort de bonne présentation ou de bonne écriture ont de grandes chances de ne pas se voir attribuer de points sur certaines questions par le correcteur, tout simplement car la copie est illisible donc les arguments ne sont pas jugés présents sur la copie, ou bien car en cas de doute sur une réponse (argument partiel ou manquant) le correcteur choisira alors toujours la version pénalisante pour dévaloriser la copie face aux autres qui font l'effort d'une bonne rédaction et d'une belle présentation. Il y a beaucoup de copies où l'écriture peu soignée rend par exemple délicate la lecture des différents indices (k, n, x, ...). Nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à soigner cet aspect de leur copie.

2 Éléments statistiques

Sur l'épreuve de la voie scientifique 2020 (toutes écoles inscrites confondues), 3868 candidats ont composé, et ont obtenu une moyenne générale de 10,83 sur 20, avec un écart-type de 5,74.

L'écart-type très haut témoigne d'une grande hétérogénéité dans les copies corrigées. Alors que certains candidats traitent pratiquement l'intégralité du sujet avec une maîtrise avancée des notions du programme, d'autres montrent des difficultés dès les toutes premières questions obtenant alors des notes très faibles, en grande partie à cause d'un travail insuffisant lors des deux années de classe préparatoire sur l'apprentissage du cours. Cette année par exemple, 20 candidats ont obtenu la note minimale de 0.01 avec aucune question répondue correctement.

Les copies étaient corrigées cette année avec un barème portant sur 120 points, dont 70 points pour le problème 1, chaque question ayant un nombre de points entier compris entre 1 et 5. Les notes des candidats sont alors obtenues en multipliant cette note brute sur 120 par un coefficient, et en lissant toutes les notes supérieures à 17, les notes étant par ailleurs harmonisées au niveau national entre les correcteurs. Toutes les hautes notes étant lissées, le nombre de candidats obtenant 20 a été donc inférieur aux années précédentes, ne conservant cette note maximale qu'aux tous meilleurs candidats (180 candidats).

Outre les questions difficiles présentes à la fin du problème 1, un candidat sérieux et rigoureux traitant correctement et entièrement seulement une partie du sujet pouvait donc espérer avoir une note tout à fait honorable. Il ne faut donc pas hésiter pour les candidats les plus faibles à essayer de repérer les questions plus faciles du sujet (qui ne sont pas uniquement les premières de chaque problème) afin de gagner des points aisément.

À l'inverse, même si un survol rapide du sujet et un « grapillage de points » peuvent être partiellement payants, les candidats auront toujours plus de points en se focalisant sur une partie entière d'un problème. Nous rappelons une nouvelle fois que l'épreuve teste les facultés de raisonnement, et par conséquent, les questions qui relèvent de la bonne compréhension de l'enchaînement des questions sont en général valorisées, et permettent à des candidats de niveau modeste de pouvoir montrer qu'ils savent manier des raisonnements déductifs, et peuvent alors plus facilement se démarquer des candidats dont le niveau est plus faible.

Enfin, les questions plus délicates sont bien rémunérées sous réserve qu'elles soient extrêmement bien traitées. En analyse par exemple dans le début du problème 2, les points sont surtout mis sur la vérification des hypothèses requises et la rédaction mathématiques ; en algèbre, les points sont en priorité attribués à la bonne utilisation des raisonnements fondamentaux algébristes et à une restitution adéquate du vocabulaire attendu.

3 Épreuve 2020

Le sujet était composé cette année de deux problèmes indépendants. Le premier problème utilisait des notions d'analyse du programme de première année : l'étude d'une suite de polynômes donnait le prétexte pour manipuler des études de fonctions, le comportement d'une suite implicite, des comparaisons somme-intégrale, des inégalités et des encadrements.

Le problème d'algèbre bilinéaire, sans doute plus « classique », étudiait un produit scalaire sur l'espace vectoriel des polynômes, et la projection orthogonale associée sur $\mathbb{R}_n[X]$. Il utilisait des notions centrales du programme de deuxième année : intégrales généralisées, orthogonalité, diagonalisation, ainsi qu'un peu de fonctions de plusieurs variables.

Le sujet a permis de bien classer les candidats, y compris pour les faibles notes. La présence de questions simples et classiques (par exemple dans le problème 1 les questions **9.a** ou **10**, ou dans le problème 2 les questions **2.a**, **2.b**, **3.**) ont permis de récompenser les candidats ayant fourni un investissement minimal en mathématiques.

Malgré la longueur apparente du sujet, les candidats ont en général abordé les deux problèmes, et de nombreuses copies ont clairement abordé toutes les questions du sujet. Cette année était particulière, ayant été marquée par le contexte sanitaire et le confinement des candidats au printemps. L'épreuve ayant été retardée de deux mois, certains candidats ont clairement su mettre à profit ce temps pour travailler en profondeur le programme et atteindre un niveau excellent grâce à leur entraînement ; d'autres à l'inverse ont perdu leurs repères jusqu'à oublier les chapitres les plus élémentaires, ce qui explique la présence de copies presque vides, en nombre supérieur aux années précédentes. L'écart-type particulièrement haut témoigne de ces grandes disparités qui ont été relevées par l'ensemble des correcteurs.

4 Analyse en détail du Sujet

Analyse Partie A du Problème 1 : Étude de la suite des racines des polynômes P_n.

1. a. Cette première question a été souvent mal comprise par les candidats, qui ont confondu les variables n et x ; on a donc souvent lu e^{-x} comme limite de $P_n(x)$. Plusieurs candidats ont éprouvé des difficultés sur le calcul de la limite de $(-x)^k$ lorsque x est au voisinage de $\pm\infty$. Une proportion étonnamment faible de candidats trouve donc le bon résultat, et encore plus faible le justifie correctement, ce qui est étonnant ne s'agissant finalement que de la limite d'un polynôme en l'infini.

b. L'application du théorème des valeurs intermédiaires est parfois tentée sans que 0 ne soit entre les limites trouvées précédemment. Certains candidats oublient l'hypothèse de continuité pourtant centrale dans cette question : cette condition était nécessaire pour obtenir les points de la question. Signalons que le théorème de d'Alembert-Gauss donne un résultat sur les racines complexes du polynôme, et non sur les racines réelles comme il était demandé ici.

2. a. Dans beaucoup de réponses, les correcteurs ont eu des difficultés à s'assurer que le candidat savait effectivement que $(-1)^k$ dépendait de la parité de k, et ne s'était pas contenté de recopier la réponse fournie. A été également repérée une gestion peu rigoureuse de la simplification $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$, valable pour $k \geqslant 1$ seulement.

b. Cette question a été peu traitée, ou souvent de façon imparfaite en général. La définition d'une racine multiple semblait bien connue, mais la justification attendue pour mentionner que la racine n'était pas nulle a souvent été trop vague.

3. a. Comme à la question **2.a**, la question de la valeur de $(-1)^k$ était centrale, et traitée avec beaucoup de désinvolture par certains candidats. Parmi les erreurs souvent remarquées, on peut signaler les suivantes : développer l'expression donnée et y voir une somme télescopique, faire des changements d'indice du type $i = 2k$ et $j = 2k+1$ ramenant à deux sommes pour $k \in [\![1, 2n]\!]$ ou $k \in [\![1, 2n+1]\!]$. .

Signalons que les correcteurs attendent, surtout sur les toutes premières questions du sujet, une attention particulière des candidats sur le soin sur leurs réponses, tout simplement parce que beaucoup de copies proposeront une réponse à cette question. Les candidats qui indiquent simplement « Il suffit de décomposer en les termes pairs et impairs » sans aucun calcul ni démonstration n'obtiennent donc aucun point, même si l'idée générale est bonne.

b. Cette question a été très mal traitée, la plupart des candidats semblant croire qu'une somme n'est nulle que si tous les termes sont nuls, ce qui les conduit à affirmer qu'une racine vaut *simultanément* toutes les valeurs $2k+1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, qui sont bien comprises entre 1 et $2n+1$.

4. a. Cette question a été mieux traitée que les précédentes du même type, surtout la deuxième égalité.

b. Les candidats ont peu traité cette question, qui demandait plus de recul vis à vis des questions précédentes et une plus grande autonomie dans le raisonnement. Il fallait impérativement montrer dans la récurrence simultanément la stricte décroissante et le fait que P_n n'admette qu'une seule racine ; tous ceux qui ont tenté de ne prouver que la décroissance par récurrence se sont vite trouvés bloqués.

Un nombre assez important de candidats a voulu montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} \leqslant P_n$, signe d'une mauvaise compréhension du concept de décroissance. Entre autres, on a parfois lu que la décroissance de P_n impliquerait la décroissance de P'_{n+1} et son signe, ou des affirmations similaires un peu farfelues et non justifiées.

5. a. On demandait ici aux candidats d'écrire une fonction Scilab calculant $P_n(x)$. On ne peut que se féliciter que les candidats aient très souvent amorcé leur démarche et proposé un script sur leur copie, alors que les années précédentes les questions d'informatique étaient délaissées.

On trouve cependant rarement de résolution totalement correcte. La structure des fonctions Scilab n'est pas bien connue : les candidats qui utilisent un `input` ou un `disp` ne saisissent pas ce que doit faire une fonction. Lorsque l'en-tête impose `function y=....`, il faut impérativement qu'au cours du script soit associé une valeur à la variable `y`.

Le principe de base pour le calcul des sommes n'est pas toujours bien acquis. On pouvait par exemple utiliser une boucle `for`, mais dans ce cas l'initialisation était souvent erronée ou manquante, beaucoup pensant à tort que l'initialisation de toute boucle `for` doit être à 1. On pouvait tout autant utiliser l'instruction `sum`, mais seul un nombre excessivement réduit de candidats a su s'en servir correctement. On a enfin vu parfois des candidats maladroitement tenter de combiner `sum` et `for`.

À noter une défaillance dans la lecture de l'énoncé par plusieurs candidats qui tentent de calculer la factorielle à leur façon, très souvent incorrecte, alors que la fonction était rappelée dans le sujet.

b. Ce script classique met en œuvre le principe de dichotomie, mais les étudiants ont eu du mal à identifier les conditions de la boucle et du test. Paraissant ici mal maîtrisé, l'algorithme de dichotomie devrait être bien travaillé par les futurs candidats, tant il est classique dans les sujets de concours et formateur dans l'apprentissage de l'informatique. D'autant plus qu'il ne s'agissait pas ici de le rédiger entièrement mais uniquement de compléter le script, ce qui facilite la résolution. De manière générale, l'erreur la plus fréquente des candidats est de confondre les conditions *tant que* et *jusqu'à ce que*.

Certains posent au début de la fonction `a=b=0` ou `b=1000`, ce qui signale plutôt une mauvaise lecture des questions précédentes. D'autres posent comme condition `while P(n,x)<>0`, ce qui pourrait entraîner que le programme ne s'arrête jamais.

c. La lecture de l'énoncé a posé problème : on représentait bien ici la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ et non la suite (u_n). On a alors lu plusieurs réponses très étonnantes, aussi bien sur la lecture graphique de la limite du quotient $\frac{u_n}{n}$, que sur l'obtention de l'équivalent de u_n.

Beaucoup trouvent un équivalent correct mais concluent à la limite nulle de la suite ! Seuls les candidats très rigoureux ont précisé que la limite α de $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ semblait être non nulle, ce qui justifierait que $u_n \sim n\alpha$.

6. a. Cette question a été correctement faite, même par des candidats répondant à très peu d'autres questions. Elle demandait simplement une bonne lecture des questions précédentes, signe que les candidats lisent bien le sujet pour percevoir la structure du sujet.

b. Cette question a également été correctement faite lorsqu'elle était abordée.

7. a. Beaucoup de candidats majorent la dérivée $P'_n(x)$ et non pas sa valeur absolue On attendait ici une application précise de l'inégalité des accroissements finis. Certains candidats ont bien identifié la méthode, mais les hypothèses requises ne sont visiblement pas connues. Il fallait notamment majorer la valeur absolue de la dérivée, et non la dérivée P'_n elle-même. Finalement, la mise en place correcte de l'inégalité telle que demandée a été très rarement effectuée.

b. Beaucoup de candidats trouvent une limite nulle, ce qui est normal, mais ne correspond pas à ce qui est demandé, ou bien écrivent que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) = P_n(u_n)$, alors que la limite ne peut pas dépendre de n.

c. La contradiction est souvent exposée de façon tortueuse.

8. Si les candidats ont bien compris que la suite était divergente d'après le raisonnement mis en place à la question **7.**, peu pensent à rappeler la monotonie de la suite pour justifier que la suite diverge *vers l'infini.*

Analyse Partie B du Problème 1 : Quelques résultats intermédiaires.

9. a. Cette question est un objectif minimal pour tout candidat de la filière ECS, et les correcteurs attendent une rédaction précise et rigoureuse.

La continuité de la fonction à intégrer (et non de l'intégrale !) aurait dû être plus souvent rappelée. Signalons à ce propos que l'expression « impropre en 0 » ne signifie pas « continue sur $]0,1]$ ».

Certains candidats ont mené de nombreuses intégrations par parties pas forcément nécessaires, dont certaines directement sur l'intervalle $[0,1]$ ce qui excluait la possibilité d'obtenir des points à la question. Les candidats peuvent très bien connaître d'après leur cours une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ et l'utiliser directement, mais il faut alors justifier correctement la limite de cette primitive en 0. Ce calcul de limite a parfois été fait de manière incorrecte, avec notamment beaucoup (trop) d'équivalents fantaisistes de ln au voisinage de 0. On a pu par exemple lire plusieurs fois que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ *donc* $\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x-1$.

Il est enfin dommage qu'on puisse lire des incohérences de signe entre la valeur de l'intégrale obtenue (-1) et la fonction positive intégrée. L'incohérence devrait pouvoir être relevée et a minima signalée par le candidat sur sa copie.

b. Le premier encadrement est plutôt bien réussi, les candidats montrant qu'ils ont compris la règle de positivité de l'intégrale, la justifiant souvent presque correctement.

Rappelons seulement qu'il n'y a pas d'équivalence entre $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

La sommation qui suivait a cependant souvent posé problème, notamment à cause des bornes de la somme. La plupart des candidats pensent à sommer de 1 à $n-1$ mais ils ont dans l'ensemble des difficultés pour transformer leurs sommes et l'inégalité obtenue.

c. Cette question a été souvent abordée par les candidats ayant abordé la question **4.a**, et cela a souvent été bien fait. Les candidats ont bien utilisé un théorème d'encadrement ; d'autres pensent de façon incorrecte qu'il s'agit d'un passage à la limite dans l'inégalité.

Il est dommage que le signe – soit souvent oublié, ou alors que le candidat s'arrête à la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, ce qui conduit à un résultat visiblement faux (résultat positif pour une somme des logarithmes négatifs). Cela dénote une nouvelle fois d'un manque d'esprit critique de ces candidats, qui vont jusqu'à mettre l'énoncé en cause parfois sans aucun esprit critique.

Certains candidats ont voulu utilisé une somme de Riemann, souvent sans citer les hypothèses du théorème ; ces dernières leur aurait sûrement fait prendre conscience que c'était impossible ici et que cela justifiait les deux questions précédentes.

d. Cette question a été peu traitée, la manipulation des logarithmes et exponentielles manquant parfois de rigueur. On a souvent lu des compositions d'équivalents par l'exponentielle ; la continuité de la fonction exp étant rarement précisée.

10. Cette question élémentaire (du niveau de Terminale) et indépendante des précédentes a été abordée par quasiment tous les candidats. Cela a été souvent bien fait, mais parfois de manière imparfaite : une hypothèse étant parfois manquante, le calcul des limites de g en 0 et $+\infty$ pouvant être manquant. Peu d'élèves mettent dans leur copie que $0 \in g(]0, +\infty[)$. Il est également dommage que l'encadrement final soit souvent affirmé sans aucune démonstration.

Analyse Partie C du Problème 1 : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. a. Les candidats reconnaissent bien la formule de Taylor avec Reste Intégral, cependant sa restitution est souvent fausse, et a conduit à beaucoup de malhonnêteté. L'idéal pour cette formule est souvent de l'écrire dans le cas général (en l'appliquant à une fonction notée temporairement f entre les bornes souhaitées) puis de calculer les dérivées successives (avec justification si besoin) puis de conclure.
Ici, très peu de candidats donnent la valeur des dérivées successives, en expliquant notamment l'origine du signe – devant l'intégrale. Typiquement, tous les candidats qui ont écrit la formule de Taylor directement avec un – devant l'intégrale n'ont obtenu aucun point à la question, tout autant que pour ceux qui ont restitué une formule de Taylor approximative où quelques erreurs entremêlées conduisaient par magie au résultat qui figurait sur l'énoncé.

b. Trop peu de candidats parviennent à traiter correctement la deuxième inégalité. Trop d'étudiants soucieux d'obtenir coûte que coûte la deuxième inégalité, affirment que $x - t \leqslant t$ pour tout t de l'intervalle $[0, x]$, utilisant implicitement que la fonction $x \mapsto x^{2n}$ serait croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Les difficultés de manipulation des puissances de (-1) sont encore présentes, comme pour les questions **2.a**, **3.a** et **4.a**. Dans plusieurs copies, on a encore une fois vu des raisonnements peu scrupuleux, certains candidats semblant avoir oublié le signe – figurant devant l'intégrale de la question **11.a**, mais trouvant le résultat attendu coûte que coûte.

12. a. Cette question a été souvent bien faite, mais bien souvent, les étudiants ne démontrent correctement qu'une seule des deux inégalités demandées. On retrouve parfois la confusion entre décroissance de suite et décroissance de fonction ($\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} \leqslant P_n$) rencontrée à la question **4.b**.

b. Cette question a été rarement traitée, notamment sa première partie.

13. a. Les raisonnements rencontrés étaient souvent corrects lorsqu'ils étaient menés.

b. Très peu de candidats traitent la première partie de la question, et la seconde partie est rarement bien justifiée.

14. Cette question de fin de sujet se prêtait au grapillage de point, récompensant (peu, mais un peu) les candidats lisant le sujet en entier. Il est cependant dommage que certains candidats obtiennent un résultat incohérent avec leur conjecture de la question **5.c** ; il serait de bon sens encore une fois de le signaler ici dans ce cas.

Analyse Partie A du Problème 2 : Étude d'un produit scalaire.

1. Cette première question, assez classique, est également un objectif raisonnable pour tout candidat sérieux de la filière ECS. Une rédaction précise et soignée est donc attendue par les correcteurs. Cette question a cependant été très souvent mal traitée, beaucoup d'informations étant souvent manquantes pour obtenir l'intégralité des points.
   Il y avait bien entendu plusieurs méthodes possibles. Si un candidat utilisait la fonction Γ, on attendait alors un argument précis, par exemple quelle(s) valeur(s) de Γ étaient reconnues, la fonction Γ n'étant pas définie sur $\mathbb{R}$ entier. Un simple « par combinaison linéaire de Γ » ne peut suffire également à convaincre le correcteur que le raisonnement sous-jacent est bien compris.

   Pour les candidats ayant choisi de redémontrer la convergence via un critère, la continuité de la fonction à intégrer a rarement été précisée (ou parfois remplacée comme à la question **9.a** du problème 1, par une unique mention d'intégrale « impropre en $+\infty$ »). Les candidats utilisant un équivalent du polynôme P en $+\infty$ ont souvent oublié le coefficient dominant.

   Certains candidats ne traitent que le cas où P est de degré 1, sans indiquer comment généraliser. Il semblerait que cela relève d'une confusion entre $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.

   D'autres affirment qu'un polynôme quelconque est toujours borné.

   En bref, cette question mérite d'être travaillée de manière précise et rigoureuse par les futurs candidats, tant elle fait appel à de nombreux raisonnements classiques qu'ils sauront exploiter dans de nombreux exercices.

2. **a.** Cette question classique et peu difficile a été abordée par la quasi-totalité des candidats. Les correcteurs attendent alors dans les réponses beaucoup de précision et de rigueur au niveau de la rédaction mathématique. Typiquement, les candidats, encore trop nombreux, mélangeant les intégrales sur $[0, +\infty[$ et sur $[0, A]$ n'obtiennent aucun point à la question. Rappelons que conformément au programme d'ECS, une intégration par parties doit toujours être réalisée sur une intégrale définie sur un segment, et non dans une intégrale généralisée.

   Les hypothèses de l'intégration par parties sont en général bien rappelées ; a contrario l'appel aux croissances comparées pour justifier la limite a été moins souvent noté.

   b. Beaucoup de candidats répondent à cette question de cours en utilisant les valeurs de la fonction Γ (en utilisant donc le résultat qu'on leur demande de prouver). La question demandait spécifiquement de déduire le résultat de la question précédente, c'était donc essentiel pour obtenir le moindre point ici. Certains candidats font une sorte de récurrence descendante, utilisant un argument du type : $I_k = \dfrac{I_{k+1}}{k+1} = \dfrac{(k+1)!}{k+1} = k!$. Une petite moitié des copies ne pense pas à regarder l'intégrale I_0, essentiellement quand la récurrence n'est pas détaillée.

3. Cette question balisée est souvent très bien traitée, même dans les copies très faibles par ailleurs. La plupart des candidats se croient obligés de redémontrer longuement la convergence de l'intégrale qui définit le produit scalaire, alors qu'une simple référence à la question 1 aurait suffi. Signalons que le caractère bilinéaire symétrique est souvent trivial pour un produit scalaire, il est donc inutile d'y consacrer deux pages de calcul, comme on a pu le voir. La quasi-intégralité des points est donc retenue sur la rédaction précise du caractère positif et du caractère défini du produit scalaire.

   Notamment, la continuité de l'intégrande n'est souvent pas citée au bon endroit : elle n'est par exemple pas nécessaire pour la positivité.

   À l'inverse, la continuité *et* la positivité de l'intégrande sont très souvent oubliées pour prouver le caractère défini, et certains pensent qu'il est nécessaire de rappeler que les bornes sont dans le bon sens pour ce même caractère.

4. Cette question est en général traitée et bien traitée. On a parfois rencontré un oubli de la racine carrée pour le calcul de la norme.

5. **a.** Beaucoup de fautes de calcul ont été effectuées, ou bien plusieurs affirmations non prouvées donnaient par magie les bonnes valeurs de Q_0 et Q_1. L'unicité des polynômes Q_k n'est pas citée explicitement après avoir vérifié que le polynôme proposé pour Q_2 convenait. Beaucoup pensent que $\|1\| = 1$ de manière générale, quelque soit le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$. Plusieurs copies utilisent l'algorithme de Gram-Schmidt y compris pour calculer Q_2, manquant clairement de recul face à la lecture de l'énoncé.

b. Cette question a été en général bien traitée. Quelques candidats croient cependant qu'une simple famille de cardinal $k + 1$ est automatiquement génératrice d'un espace de dimension $k + 1$. Beaucoup de copies font bien la distinction entre le cardinal de la famille et la dimension de l'espace, c'est agréable. Les correcteurs pénalisent donc à l'inverse tous ceux qui confondent les deux notions.

6. **a.** Le calcul de H_2 est souvent correct lorsqu'il est fait. Cependant, les calculs explicites donnant le produit de la matrice proposée avec H_2 ne figurent que très rarement sur les copies. Beaucoup trop de candidats se lancent dans la justification de l'inversibilité grâce à la méthode de Gauss et font des calculs inutiles.

L'inversibilité de la matrice H_2, quand elle a été traitée par les candidats sans recourir au produit matriciel suggéré par l'énoncé, a été souvent mal faite. Certains candidats affirment que l'on peut « voir » que les colonnes ne sont pas proportionnelles. Signalons une nouvelle fois qu'une matrice symétrique n'est pas systématiquement inversible, et cela ne vaut pas non plus pour une matrice symétrique à diagonale non nulle.

b. Peu d'étudiants savent ce qu'est une matrice d'une famille de vecteurs dans une base ; ils donnent parfois la matrice de $\mathcal{C}_2$ dans la base $\mathcal{B}_2$, ou encore la matrice triangulaire inférieure dont les *lignes* sont les composantes des éléments de $\mathcal{C}_2$ dans la base $\mathcal{B}_2$. Notons aussi une part importante de candidats qui donne la bonne valeur de A_2 sans un mot d'explication, parfois même sans avoir répondu à la question **5.a.**, dans une copie de niveau médiocre par ailleurs.

7. **a.** La justification correcte du caractère triangulaire sans élément nul sur la diagonale est difficile, cela n'a quasiment jamais été fait correctement, et surtout c'était inutile pour répondre : une matrice de passage est automatiquement inversible. Et il ne s'agit pas ici d'une matrice de passage d'une base orthonormale à une autre !

Beaucoup de candidats pensent que la base canonique est forcément orthonormale, alors que cela dépend du produit scalaire étudié.

b. La rareté des réponses à la première partie de la question montre encore que le procédé de construction de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base n'est pas compris. Pour la deuxième partie, beaucoup de problèmes ont été signalés pour développer un produit scalaire de deux sommes : il faut deux indices différents ! Quelques bonnes copies précisent que, la base $\mathcal{C}_2$ étant orthonormale, le produit scalaire s'exprime de cette manière.

c. La formule explicite du produit général de deux matrices n'est que rarement donnée, et il est impossible dans ces conditions d'attribuer les points de la question, d'autant moins quand on confond matrice et terme général de cette matrice.

8. **a.** Cette question a été correctement faite par ceux qui l'ont abordée. On lit malheureusement encore beaucoup, comme à la question **6.a.** qu'une matrice symétrique serait toujours inversible, ou bien toujours diagonalisable donc inversible (ce qui parfois est suivi directement à la question suivante de diagonalisable car inversible).

b. Cette question a été correctement faite par ceux qui l'ont abordée (à part ceux qui le justifient par l'inversibilité de H_n) .

c. L'égalité ${}^tYH_nY = \lambda\|Y\|^2$ a souvent été obtenue, mais son exploitation a manqué de rigueur. On relève souvent des problèmes dans la manipulation des égalités. Ainsi $\lambda\|Y\|^2 = \|A_nY\|^2$ est souvent devenu $\lambda = \frac{\|Y\|^2}{\|A_nY\|^2}$.Pour certains aussi on obtient : $\|A_nY\| = \|A_n\|$; il semblerait qu'il y ait eu une simplification par $\|Y\|^2$.

Analyse Partie B du Problème 2 : Étude d'une projection.

9. a. Cette simple question de lecture a été bien faite. Certains candidats se compliquent inutilement la vie en exploitant la linéarité de l'intégrale plutôt que directement la bilinéarité du produit scalaire. Étrangement, cette question facile a été mal identifiée par ceux qui ne l'abordent pas, alors qu'ils ont traité des questions plus difficiles juste avant et juste après. Certains candidats sont imprécis et ne voient pas que les coordonnées de R dans la base B_n sont imposées par la matrice V. Rappelons encore une fois que la base canonique n'est pas nécessairement orthonormale.

b. Cette question est peu traitée, la projection orthogonale et les difficultés à écrire proprement un produit matriciel expliquant le peu de succès. La caractérisation avec $P - R \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ est assez souvent citée mais mal exploitée matriciellement. Ici encore, l'utilisation de la prétendue orthonormalité de la base canonique est un argument malheureusement souvent utilisé pour donner l'expression du projeté orthogonal.

10. Cette question a été bien faite par ceux qui s'y sont risqués. Les candidats font alors souvent les calculs correctement sans utiliser le résultat de la question **9.b.** mais en revenant à la définition de leur cours. C'est plus long mais quand même correct.

11. a. Cette question a été correctement traitée dans l'ensemble et abordée dans la plupart des copies, même si le développement du carré, ainsi que l'utilisation des valeurs de I_k, manquent souvent de rigueur. Cette question fut aussi l'occasion d'entourloupes manifestes à l'égard des correcteurs : certains candidats se trompent dans le développement (oubliant un terme, ou faisant une légère erreur) mais font comme si de rien n'était et encadrent le résultat final qui est bizarrement celui qui était attendu dans l'énoncé. Inutile de rappeler que ce genre de pratique est sanctionné fermement sur la question.

b. Le calcul des dérivées partielles est correct, de même que la définition d'un point critique, mais la conduite des calculs est maladroite, pour répondre à la question posée. L'unicité de ce point critique est souvent non justifiée, sauf lorsque ce point critique est calculé explicitement. Les calculs du point critique (non demandés) représentent une perte de temps, notamment en fin d'épreuve. L'inversibilité de la matrice H_2 aurait été bien plus efficace et suffisante.

c. Rappelons qu'on ne peut pas se contenter de donner la matrice $2H_2$ sans justification lorsque la réponse est donnée par l'énoncé...

d. Question bien traitée par ceux qui l'ont abordée. Certaines copies cherchent à déterminer le spectre de la hessienne, ce qui est inutile si on a compris la progression du problème.

e. Cette question a été bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

f. Enfin, cette question a été peu traitée, bien qu'elle se prête au grappillage puisqu'il ne s'agissait que de faire le produit de deux matrices données par l'énoncé pour répondre... Très peu de ceux qui ont abordé la question ont vu qu'elle se résumait effectivement à ce produit matriciel et ont refait des calculs (souvent inaboutis). La lecture précise des mots utilisés par l'énoncé (« Retrouver ») pourrait être avantageuse pour les candidats.