BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 295**

**Conception : em lyon business school**

---

OPTION SCIENTIFIQUE

## MATHÉMATIQUES

Mardi 27 avril 2021, de 14 h. à 18 h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---



Tournez la page S.V.P.

# PROBLÈME 1

## PARTIE A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

**1.** **a.** Montrer : $\forall t \in ]0\,;+\infty[, \quad \dfrac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \dfrac{1}{t}.$

**b.** En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée $\gamma$.

**2.** Montrer alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$

**3.** **a.** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\dfrac{u_n + v_n}{2} - \gamma\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(v_n - u_n).$

**b.** En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function gamma = approx()` qui renvoie une approximation du réel $\gamma$ à $10^{-5}$ près.

## PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

**4.** Montrer que, pour tout $x$ de $[0\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ converge.

On pose alors, pour tout $x$ de $[0\,;+\infty[$ : $\displaystyle S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).$

**5.** **a.** Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1$.

**b.** Montrer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}.$

En déduire la valeur de $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**6.** **a.** Montrer : $\displaystyle\forall (x,y) \in [0\,;+\infty[^2, \quad S(y) - S(x) = (y-x)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$

**b.** En déduire que $S$ est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**c.** Montrer : $\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad \forall h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\right| \leqslant |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

En déduire que $S$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et : $\displaystyle\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$

On **admet** que $S'$ est également continue sur $[0\,;+\infty[$.

**7.** **a.** Montrer : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad S(x+1) = S(x) + \dfrac{1}{x+1}.$

**b.** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

**c.** En utilisant la croissance de la fonction $S$ sur $[0\,;+\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$

**8.** **a.** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x,$ le réel $u_n$ étant défini dans la partie **A**.

**b.** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$

**c.** Conclure : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \gamma.$

## PARTIE C : Application en probabilité

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

**9.** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle $X$ à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, de densité $f$.

**10.** **a.** Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**b.** La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire $Y$ par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel $x$.

**11.** **a.** Montrer, pour tout $x$ de $[0\,;1[$ :

$$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(k \leqslant X \leqslant k+x) \qquad \text{puis} \qquad \mathbf{P}(Y \leqslant x) = S(x).$$

**b.** En déduire la fonction de répartition de $Y$.

**c.** Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de $Y$.

**12.** Justifier que $Y$ admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\mathbf{E}(Y) = 1 - \gamma.$$

# PROBLÈME 2

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $T$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T$ lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k\to+\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, $T_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\, X^i$ avec $(a_{k,0}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

et si $T = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i\, X^i$ avec $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

alors : pour tout $i$ de $[\![0\,;n]\!]$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_{k,i} = b_i$.

## PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on définit l'application $\varphi_n$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)\,P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2\,P''.$$

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}\,X^{i+1} + \frac{2\,i\,(n-i)}{n^2}\,X^i + \frac{i^2}{n^2}\,X^{i-1}.$$

**b.** Montrer que $\varphi_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $A_n$ la matrice de $\varphi_n$ dans la base canonique $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ ; ainsi, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $A_n$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

**2.** **Cas $n = 2$ :**

**a.** Vérifier : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

**b.** Montrer que le spectre de $A_2$ est $\left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\}$.

Justifier alors que $A_2$ est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de $A_2$.

**c.** En déduire le spectre de $\varphi_2$ et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de $\varphi_2$.

**3.** Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $(X-1)^n$ est vecteur propre de $\varphi_n$ associé à la valeur propre $\dfrac{-1}{n}$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Vérifier : $\forall i \in [\![0\,;n]\!], \quad \big(\varphi_n(X^i)\big)(1) = 1$.

**b.** En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de $A_n$ est égale à 1.

**c.** Montrer alors que 1 est une valeur propre de $\varphi_n$.

**5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (n+1)^2 \varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = (X-1)\left(n^2\varphi_n(P) - P\right)$.

**b.** En déduire que si $P$ est un vecteur propre de $\varphi_n$ associé à une valeur propre $\lambda$, alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de $\varphi_{n+1}$ et préciser la valeur propre associée en fonction de $\lambda$.

**6. a.** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} \,;\, j \in [\![0\,;n]\!] \right\}.$$

**b.** En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $\varphi_n$ est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

**7.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Pi_n$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\Pi_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i$.

**a.** À l'aide de la question **1.a.**, montrer : $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.

**b.** En déduire le sous-espace propre de $\varphi_n$ associé à la valeur propre 1.

**8.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout $j$ de $[\![0\,;n]\!]$, $R_j$ un vecteur propre de $\varphi_n$ associé à la valeur propre $\lambda_j = \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

**a.** Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, $\quad \varphi_n^k(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j\right)^k R_j$, $\quad$ où $\varphi_n^k$ désigne l'endomorphisme $\underbrace{\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_n}_{k \text{ fois}}$.

**b.** En déduire qu'il existe un réel $\alpha$ tel que la suite de polynômes $\left(\varphi_n^k(P)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha\,\Pi_n$.

## PARTIE B : Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, $n$ désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de $n$ boules rouges et de $n$ boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher.

Initialement, on place les $n$ boules rouges dans l'urne rouge et les $n$ boules bleues dans l'urne bleue.

On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours $n$ boules.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier $k$ de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Z_k$ égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la $k$-ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.

*On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.*

**9.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_1$.

**10.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer : pour tout $i$ de $[\![0\,;n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z_{k+1}=i)=\left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2\mathbf{P}(Z_k=i-1)+2\,\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\mathbf{P}(Z_k=i)+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2\mathbf{P}(Z_k=i+1).$$

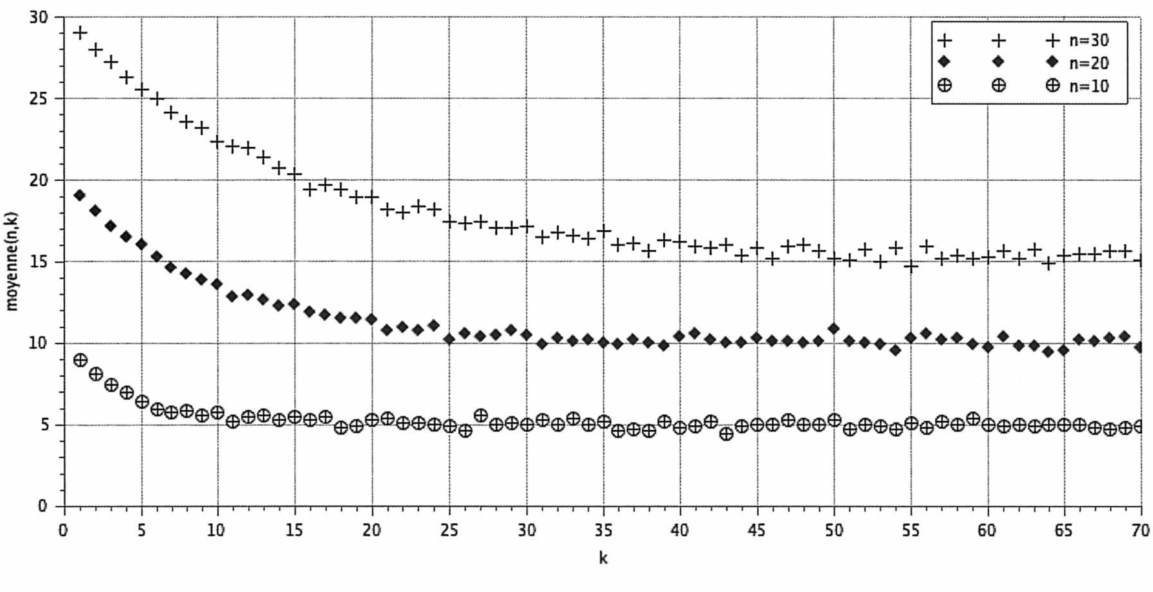
**11. a.** Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Scilab suivante pour que, prenant en entrée le nombre $n$ initial de boules rouges et le nombre $k$ d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de $Z_k$.

```
function Z = simule(n,k)
    R = n // R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
    for j = 1:k
        aleaR = rand()
        aleaB = rand()
        if aleaR <= (R/n) & aleaB <= (R/n) then
            R = ........
        elseif ....... then
            R = R+1
        end
    end
    Z = .......
endfunction
```

**b.** Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function E = esperance(n,k)` qui, prenant en entrée le nombre $n$ initial de boules rouges et le nombre $k$ d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de $Z_k$.

On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

**c.** On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de $Z_k$ en fonction de $k$ pour différentes valeurs de $n$. On obtient le graphe ci-dessous.




Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de $Z_k$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

**12.** On note, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ : $\quad \Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

**a.** Déterminer, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.

**b.** Montrer, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$\mathbf{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i).$$

**c.** Montrer alors, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$\mathbf{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}\,\mathbf{E}(Z_k) \qquad \text{puis} \qquad \mathbf{E}(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\mathbf{E}(Z_k) + 1.$$

**d.** En déduire, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction de $k$ et de $n$.
Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{E}(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.

**13.** Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q_k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\quad Q_k = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Z_k = i)\, X^i$.

**a.** À l'aide de la question **1.a.**, démontrer, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}, \quad \text{où } \varphi_n \text{ est l'endomorphisme étudié dans la partie } \mathbf{A}.$$

**b.** En déduire qu'il existe un réel $\alpha$ tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha\,\Pi_n$, où $\Pi_n$ est le polynôme défini à la question **7.**.

**14. a.** Déduire de la question précédente : $\quad$ pour tout $i$ de $[\![0\,;n]\!]$, $\quad \lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{P}(Z_k = i) = \alpha \dbinom{n}{i}^2$.

**b.** On **admet** la formule suivante : $\quad \forall (a,b,m) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum\limits_{i=0}^{m} \dbinom{a}{i}\dbinom{b}{m-i} = \dbinom{a+b}{m}$.

Montrer : $\quad \alpha = \dfrac{1}{\dbinom{2n}{n}}$.

**c.** Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ dont on précisera la loi et l'espérance.

**• FIN •**

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1232 – D'après documents fournis