

Mathématiques – option scientifique

Conception ESSEC/HEC Paris

Session 2021

Description du problème

L'objet du problème était l'étude de la transformée de Fourier discrète des vecteurs de \mathbb{C}^n . La première partie concerne la réduction de la matrice de Fourier-Vandermonde avec notamment l'étude en dimension 2 et 4. Dans la seconde, on utilise cette matrice pour obtenir une caractérisation des matrices circulantes. La troisième partie permet d'appréhender la complexité d'un algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète d'un vecteur de \mathbb{C}^n .

Barème, attentes du jury

Les questions étaient de difficultés variées, certaines proches du cours et d'autres demandant de l'initiative et de la réflexion. Aucune n'appelait à des développements trop longs ou trop techniques, ce qui aurait dû éviter aux candidats de se fourvoyer et de s'égarer. Les liaisons entre les questions étaient nettement marquées. L'ensemble a permis aux étudiants maîtrisant les connaissances exigibles et capables d'attention et de rigueur de progresser dans le problème pour montrer leurs qualités.

L'indépendance des parties devait permettre aux étudiants sérieux et pugnaces d'obtenir d'excellentes notes grâce à un travail approfondi sur l'ensemble du problème. A cet titre, la longueur du sujet n'a pas constitué un handicap, mais on peut regretter le nombre infime de copies abordant ne serait-ce que partiellement la partie algorithmique.

Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, présentant un nombre significatif de questions de difficultés raisonnables. Ainsi, il était conforme au programme et à son esprit.

59 %, 28 % et 17 % des points du barème ont été affectés aux trois parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

Cette année encore, les copies étaient majoritairement soignées et bien présentées. L'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

L'équipe de correction dans son ensemble a néanmoins été très surprise par le manque de connaissances souvent total sur les nombres complexes. Elle souhaite également souligner cette année le recours accru au bluff, voire à l'enfumage par certains candidats. Certes, il est normal de profiter de l'ensemble du problème pour alimenter sa réflexion et favoriser sa compréhension des problématiques. Ainsi, certains savent à bon escient puiser dans les questions suivantes des informations et des pistes pour comprendre et résoudre la question qui les bloque. Mais, cela ne doit en aucun cas se transformer en jeu de devinettes suivies d'affirmations non fondées sur une preuve ou des calculs rigoureux.

La première question pose déjà des problèmes puisque de nombreux candidats n'écrivent pas $e^{2i\pi} = 1$. Trop peu de copies contiennent une explication acceptable de $\omega_n^k \neq \omega_n^{k'}$ et l'obtention de la factorisation du polynôme est rarement rigoureuse. L'étude de A_2 est souvent correcte mais que de long calculs pour en obtenir les sous-espaces propres !

La question 3, qui portait sur la matrice A_4 , était déjà discriminante : les calculs de $\overline{A_4 A_4}$ et des puissances de A_4 ont posé des difficultés. Et de nombreux candidats malhonnêtes ont pensé qu'avoir deviné les

résultats en lisant la suite du problème permettait d'affirmer péremptoirement « après calculs au brouillon, on trouve ... ». Il est rappelé que les calculs et démonstrations doivent figurer sur la copie ! Les bonnes copies venaient généralement à bout de la réduction de F_4 .

La question 4 a été peu traitée.

En 5, on a trouvé des candidats à l'aise et d'autres qui renouvelaient leurs malhonnêtetés de 3.

Il en va de même en 6. On y constate en outre que peu de candidats savent donner toutes les racines de $X^4 - n^2$.

La question 7 n'a été comprise et bien traitée que dans les bonnes copies. Beaucoup de candidats sont passé très vite à la partie II.

La partie II a rapidement attiré les candidats perdus dans le I. la question 8 a souvent été traitée mais rarement rigoureusement. Dans 9, on n'a souvent vu que c).

Beaucoup de candidats ont abordé 10a par le théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels, rarement comme sous-espace engendré et leur réponse s'est arrêtée à cela. De rares copies ont réussi 10b où on a vu aussi des confusions avec la multiplication par un scalaire.

Les candidats lucides ont su généralement expliquer 11b. Mais 11c et 12 ont eu peu de succès.

Dans la partie III, quasiment jamais abordée, on n'a trouvé que quelques réponses laconiques à 13b, quelques calculs en 13c et de rares explicitations de 13d, ce qui est quand même surprenant. On peut penser que certains avaient le temps mais n'ont pas eu la combativité nécessaire pour lire le sujet jusqu'au bout. La remarque vaut pour 14. On terminera cette énumération en rappelant aux candidats qu'il est inutile de donner son avis sur 14c si on n'a fait aucun calcul pour l'étayer !

Conclusion et conseil aux futurs candidats

Le sujet présentait des difficultés techniques modérées mais demandait d'avoir le strict savoir minimum sur les nombres complexes. Il fallait également avoir bien compris le cours d'algèbre linéaire. Certaines copies font montre d'une belle maîtrise quand d'autres ont du mal à initier la moindre démonstration.

Les correcteurs renouvellent avec force leur demande exprimée dans les rapports des années précédentes : les copies doivent être propres, bien présentées. C'est majoritairement le cas, mais il persiste des copies peu soignées ou bien désagréables à lire. Attention, l'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont, avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

Il faut également éviter les encres trop pâles puisque les correcteurs travaillent maintenant sur les versions numérisées des copies.

Le barème adopté a engendré un bon étalement des notes et le sujet a permis de bien distinguer les meilleurs étudiants. Une quarantaine de très bonnes copies ont obtenu la note maximale.

Pour 2603 copies corrigées, l'écart-type de l'épreuve s'établit à 05.32 pour une moyenne générale de 10,44.