ecricome

CONCOURS D’ADMISSION 2025

3

prépa

Mathématiques Technologiques

Série Technologique

Mardi 15 avril 2025 de 8h00 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L’énoncé comporte 6 pages.

INSTRUCTIONS

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n’est permis, aucun instrument de calcul n’est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l’usage d’appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l’épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l’énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l’épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d’énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu’il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d’ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l’issue de l’épreuve.

Exercice 1

Partie 1

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $J = M - 2I$.
   (a) Expliciter les coefficients de J.
   (b) Déterminer les coefficients de J^2 et exprimer J^2 en fonction de J.
   (c) Donner une expression de M^2 en fonction de I et J.
   (d) Montrer que $M^2 = 7M - 10I$.
2. Soit $R(X) = X^2 - 7X + 10$.
   (a) Que dire du polynôme R pour la matrice M ?
   (b) Vérifier que 2 est racine de R, puis déterminer une autre racine de R.
   (c) En déduire des valeurs propres possibles pour M.
3. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $M\,U$. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que les vecteurs $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M associés à la valeur propre 2.
5. On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit $Q\,P$.
   (b) En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de Q.
   (c) Vérifier que $P\ D = M\ P$.
   (d) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3} P\, D^n\, Q.$$

Partie 2

6. Les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont définies par :
   $$a_0 = 0,\ b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 7\ a_n + b_n \\ b_{n+1} &= -10\ a_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_n &= 5a_n + b_n \\ v_n &= -2a_n - b_n \end{cases}$$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison 5, puis exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique, puis exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \text{ et } b_n = \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n).$$
7. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, $M^n = a_n M + b_n I$.

On admet que pour tout entier naturel n, $M^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Partie 3

Un chat se nourrit chaque jour dans une des trois maisons numérotées 1, 2, 3.
Le jour numéro 1, le chat se nourrit dans la maison 1.
Puis chaque jour suivant, ce chat se nourrit dans la même maison que la veille avec la probabilité $\frac{3}{5}$, ou dans l'une des deux autres maisons de façon équiprobable.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire X_n égale au numéro de la maison où le chat se nourrit le jour numéro n.
Ainsi X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.

8. (a) Justifier que : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$ et que $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{5}$.
   (b) Déterminer l'espérance de X_2.
   (c) Vérifier que la variance de X_2 est $\frac{16}{25}$, et en déduire l'écart type de X_2.
9. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3.
   (b) Sachant que le troisième jour le chat est dans la troisième maison, quelle est la probabilité que le chat se soit nourri dans la deuxième maison le deuxième jour ?
10. On considère, pour tout entier naturel non nul n, la matrice colonne $C_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
    (a) Justifier précisément que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{1}{5}\ M\ C_n$.
    (b) Démontrer que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{1}{5^{n-1}}\ M^{n-1}\ C_1.$$
    (c) En déduire la loi de probabilité de la variable X_n.
11. (a) Exprimer l'espérance $\boldsymbol{E}(X_n)$ en fonction de n.
    (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{E}(X_n)$.

Partie 4

Un voisin du quartier, vétérinaire, se soucie de la santé des chats qui y vivent et tient à jour une base de données qui contient deux tables : `chats` et `propriétaires` :

```
        chats =  (idchat : INTEGER, nomchat : TEXT, race : TEXT, sexe : TEXT, couleur : TEXT,
                 âge : INTEGER, poids : INTEGER, puce : INTEGER)
propriétaires =  (idprop : INTEGER, nomprop : TEXT, adresse : TEXT, nomchat : TEXT, pucechat : INTEGER).
```

12. Quel est l'effet de la requête
    `SELECT nomchat, puce FROM chats WHERE couleur = 'gris' AND sexe = 'F'` ?
13. Mme Michel a pour identifiant `idprop` 1234. Son chat très âgé ayant disparu, elle a acquis un nouveau chat nommé «Niels» dont le numéro de puce est 987654321.
    Écrire une requête permettant de modifier l'enregistrement adéquat dans la table `propriétaires`.
14. Niels est un chat mâle de race birmane, de couleur blanche, d'âge 1 an, de poids 2 kg. Son identifiant dans la table `chats` est 457 et son numéro de puce est 987654321.
    Écrire la requête permettant d'enregistrer ces informations dans la table `chats`.
15. On souhaite regrouper des informations contenues dans les deux tables.
    Compléter la requête suivante :

```
SELECT chats.nomchat, race, puce, nomprop, adresse
FROM ..........
ON chat.puce = propriétaires.pucechat.
```

Exercice 2

Partie 1

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$$

On admet que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.
2. (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. (a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction g.
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction f, avec ses limites aux bornes.
   (d) Étudier la convexité de f.
4. Étudier la convexité de g.
5. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives respectives de f et de g.
   (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
   (b) Préciser la position relative de $\mathscr{C}_g$ et (T).
   (c) En déduire que : $\forall x \leqslant 0,\ g(x) \leqslant 2x$ et $\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 2x$.
6. (a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant g(x)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?
7. Tracer, dans un repère orthogonal du plan, l'allure des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que la droite (T).
8. Notons $\mathscr{A}$ l'aire de la surface délimitée par (T) et $\mathscr{C}_f$ entre les bornes 0 et 1.
   (a) Hachurer cette surface sur le graphique de la question 7.
   (b) Déterminer l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.
   (c) Calculer $\mathscr{A}$ (en unités d'aire).
9. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - 2 - x^2 \text{ et } k(x) = g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3.$$

   On admet que h et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel x.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 2 + x^2$.
   (c) Calculer $k'(x)$ pour tout réel x.
   (d) En déduire que : $\forall x \leqslant 0,\ g(x) \leqslant 2x + \frac{1}{3}x^3$ et que $\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 2x + \frac{1}{3}x^3$.

Partie 2

10. Soit n un entier naturel non nul.
    Démontrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution.

On note u_n cette solution et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(u_n) = \frac{1}{n}$.

11. Démontrer que $0 < u_1 < 1$. *(On donne* $\mathrm{e} \simeq 2,7$ *et* $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,4$.*)*
12. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
13. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
    (b) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

14. La bibliothèque numpy est importée de la manière suivante :

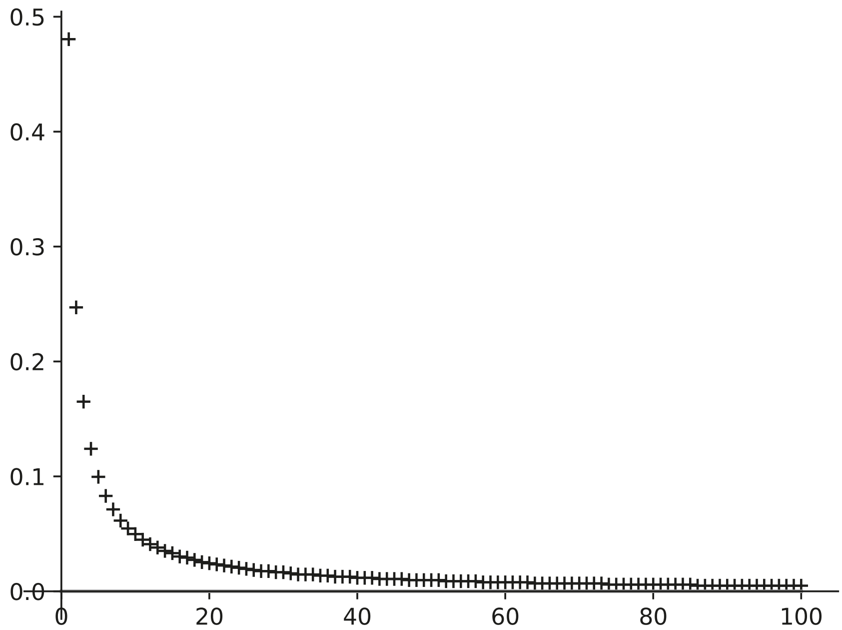
```
import numpy as np
```

(a) Écrire en langage Python, une fonction nommée `d` qui prend en entrée un réel x et un entier naturel n non nul et qui renvoie le réel $g(x) - \dfrac{1}{n}$.

(b) Recopier et compléter, en langage Python, la fonction suivante nommée `SuiteU` qui prend en entrée un entier naturel non nul n et qui renvoie sous la forme d'une liste des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes $u_1, \ldots, u_n$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

```
def SuiteU(n):
    U=np.zeros(n)
    for k in range(n) :
        a = 0 ; b = 1
        while b - a > ..... :
            c = (a + b)/2
            if d(a,k+1)*d(c,k+1) < 0 :
                b = .....
            else :
                .....
        U[k]=.....
    return(U)
```

(c) Les fonctions précédentes permettent d'obtenir le tracé suivant des 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.



Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

Exercice 3

Partie 1

Soit T une variable aléatoire représentant la durée de vie (en jours) d'un papillon. On suppose que T est une variable aléatoire à densité de loi exponentielle de paramètre 1.

1. (a) Rappeler une densité de T, son espérance et sa variance.
   (b) Rappeler l'expression de la fonction de répartition F_T de T.
   (c) Calculer la probabilité que le papillon vive au plus trois jours.
   (d) Sachant que le papillon a déjà vécu une journée, quelle est la probabilité qu'il vive au moins un jour de plus ?
2. Soit U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0,1[$.
   Soit $X = -\ln(U)$. On admet que X est une variable aléatoire à densité.
   (a) Rappeler une densité f_U de U et sa fonction de répartition F_U.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(U \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   (c) En déduire que : $\forall x < 0,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$.
   (d) En déduire la fonction de répartition de X et une densité de X.
   (e) Les bibliothèques suivantes sont importées ainsi :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

   Écrire en langage Python, une fonction nommée `SimulT` simulant la variable aléatoire T.

Partie 2

3. (a) Soit $A > 0$. Calculer $I_1(A) = \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
4. Pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel non nul n, on pose $I_n(A) = \displaystyle\int_0^A x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{\mathrm{e}^A} + nI_n(A).$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Démontrer que si $I_n(A)$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$, alors $I_{n+1}(A)$ admet aussi une limite finie quand A tend vers $+\infty$.
6. En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge puis établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = nI_n.$$
7. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (n-1)!$$

Partie 3

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

8. Pour tout entier naturel n non nul, prouver que f_n est une densité de probabilité.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Y une variable aléatoire à densité de densité f_n.
   (a) Montrer que Y admet une espérance et que $\boldsymbol{E}(Y) = n$.

   On admet que Y admet une variance et que $\mathbb{V}(Y) = n$.

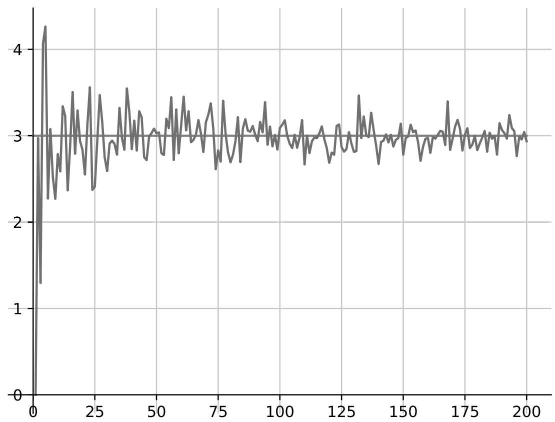
   (b) Soit $(Y_N)_{N \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y.
   Pour tout entier naturel non nul N, on pose $F_N = \dfrac{1}{N}\Big(Y_1 + \ldots + Y_N\Big)$.
   Déterminer l'espérance et la variance de F_N.

   (c) On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
   Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big(|X - \boldsymbol{E}(X)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

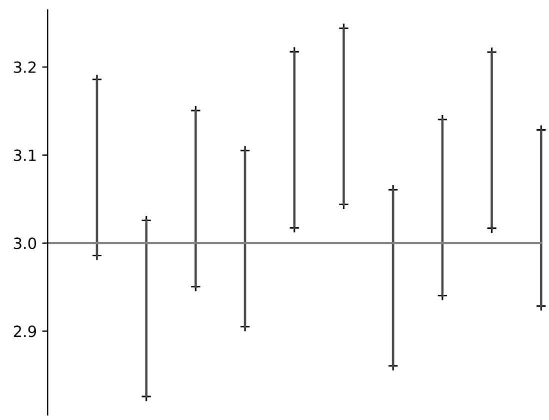
   Déterminer un majorant, dépendant de n, de N et de ε, de $\mathbb{P}\Big(|F_N - n| \geqslant \varepsilon\Big)$.

   (d) À l'aide d'un programme `Python`, on représente F_N en fonction de N pour un paramètre n inconnu que l'on cherche à estimer.



   Estimer la valeur de n.

   (e) On effectue 10 réalisations de F_N, et pour chacune de ces réalisations, sont tracés ci-dessous les intervalles de confiance, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, $N = 600$ et n la valeur conjecturée précédemment.



   Expliquer pourquoi certains intervalles ne contiennent pas la valeur de n.