Concours d'admission sur classes préparatoires

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
2024

Présentation de l'épreuve

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
• Des questions d'informatique (Python) étaient proposées dans les exercices 1 et 2 ainsi que dans le problème, mais certains correcteurs ont regretté qu'elles ne soient pas plus nombreuses.
• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, les questions posées étant « en accord avec l'esprit du programme », ce qui a permis aux candidats de s'intéresser à presque toutes les questions. A contrario, certains correcteurs ont trouvé la partie 2 de l'exercice 3 trop théorique et abstraite pour des élèves d'ECG.

Description du sujet

L'exercice 1, portant sur la partie analyse du programme, proposait l'étude de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall\ x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n,\ f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$$

Il s'agissait de montrer que f_n admettait un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ atteint en chaque point critique de f_n.
Globalement, c'est l'exercice le mieux réussi de l'avis de la majorité des correcteurs, même si certaines questions ont été mal traitées par l'ensemble souvent unanime des candidats : par exemple, l'inégalité $f_n(x)\geq 0$ ne suffit pas à affirmer que la fonction f_n admet un minimum global et le fait que 0 et n soient valeurs propres de J_n ne suffit pas à affirmer que le spectre de J_n est égal à $\{0,n\}$.
On se doit de remarquer qu'un nombre non négligeable de candidats n'ont pas su calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f_n et oublient de signaler qu'un vecteur propre doit être non nul.

L'exercice 2, portant sur la partie probabilités du programme, s'intéressait à la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2}{\pi(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}$.

On prouvait dans un premier temps que cette fonction pouvait être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X, que l'on simulait via la méthode d'inversion et dont on déterminait la variance. Pour finir, on considérait la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, et suivant la même loi que $Y=\mathrm{e}^X$ et on montrait que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $M_n=\max(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ convergeait en loi vers une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Cet exercice est relativement bien réussi, les candidats ayant répondu à presque toutes les questions, mais pas toujours correctement ! On a par exemple lu en assez grand nombre des phrases comme « l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ est convergente » et très souvent qu'une fonction de dérivée nulle est constante (il manque une hypothèse). De nombreux candidats se sont contentés de dériver la fonction F pour vérifier que c'est la fonction de répartition de X, d'autres on écrit l'événement $\left(X \leq \ln(x)\right)$ avant d'annoncer que x est strictement positif…

L'exercice 3, portant sur la partie algèbre bilinéaire du programme, proposait, dans sa première partie, l'étude de l'application f qui, à tout vecteur x d'un espace euclidien E, associe :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i , x \rangle u_i$$

On prouvait que f était un endomorphisme de E, puis on cherchait notamment son noyau, son image et ses valeurs propres

Dans la deuxième partie, on montrait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, convergeait vers le vecteur nul (dans un sens donné par l'énoncé) et la dernière question demandait la nature de la série $\sum_n \| x_n \|$.

Cet exercice est le moins bien réussi et le moins abordé. Il a donné lieu à des fautes prouvant le manque de maîtrise de la majorité des candidats en algèbre bilinéaire : par exemple, dans la deuxième question, un projecteur est confondu avec l'application identité. Certains candidats semblent même confondre les objets (scalaires et vecteurs) mis en jeu. Même la question 1), pourtant facile, a donné lieu à de grosses pertes de points puisqu'un bon nombre de candidats, à cause d'une mauvaise lecture ou d'une lecture trop rapide, ont oublié de montrer que f était un endomorphisme et pire, certains ignoraient même ce qu'est un endomorphisme symétrique.

Le problème, portant sur les parties analyse et probabilités du programme, proposait l'étude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \mathrm{d}t$.

La première partie consistait à trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \mathrm{d}t$.

La deuxième partie avait pour but, en s'appuyant sur $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \mathrm{d}t$, d'établir que $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Pour finir, la troisième partie proposait, en utilisant certains des résultats précédents, de montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de "piles" que de "faces" lors de $2n$ lancers indépendants d'une pièce équilibrée tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, résultat confirmé ensuite grâce au théorème central limite.

Le problème a, dans l'ensemble, été moyennement réussi, tant les confusions ou approximations sont légion : en voici trois exemplaires :

Question 2a) : l'utilisation de la convexité de la fonction exponentielle n'était pas adaptée.

Question 3) : il est faux d'affirmer que $\frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ …

Question 8a) : pour montrer que $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$, il ne suffisait pas de montrer que $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ et X_n suivent la même loi.

Barème

Les quatre exercices comptaient respectivement pour environ 19%, 32%, 18% et 31% des points de barème et le poids des questions de `Python` représentait presque 7% des points de barème.

Statistiques

- Pour l'ensemble des 2988 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,11 sur 20 (pratiquement identique à celle de l'année dernière), la médiane est égale à 11,4 et l'écart type vaut 5,52 (très important, comme les années précédentes, ce qui est signe d'un classement efficace des candidats sur toute la gamme des notes).

- 30,9% des candidats ont une note inférieure à 8 (dont 13,7% ont une note inférieure à 4) contre 33,8% l'année dernière (dont 13,1% l'année dernière).

- 23,6% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage très légèrement supérieur à celui de l'année dernière qui était égal à 22%).

- 22,6% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage un peu inférieur à celui de l'année dernière qui était égal à 24,9%).

Conclusion

Comme l'année dernière, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les notions courantes, les calculs classiques et les raisonnements simples sont maîtrisés par un grand nombre de candidats, mais dès que l'énoncé propose une réflexion plus fine ou présente une notion un peu abstraite, il ne reste que peu de candidats pouvant se hisser à ce niveau : ceux qui ont pu le faire ont clairement fait la différence sur le gros de la troupe.

Sur la forme, les copies sont, dans l'ensemble, agréablement présentées et rédigées dans un souci de clarté et de transparence mais les correcteurs remarquent qu'il y a encore une minorité non négligeable de candidats qui rendent des copies difficiles à lire et contenant beaucoup de fautes d'orthographe et de grammaire. Certains correcteurs proposent de revenir à un bonus pour les copies agréables à lire ou à un malus pour les copies sales et peu respectueuses du correcteur.

Sur le fond, les copies sont majoritairement honnêtes mais il reste une assez grosse minorité de candidats adeptes du bluff (notamment en probabilité) : ils doivent savoir que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable ! Une bonne réponse est une réponse construite rigoureusement.

Dans l'ensemble, les questions "classiques" ne posent pas trop de problème mais les correcteurs ont un peu l'impression de méthodes apprises par cœur et parfois confondues entre elles, donc ils ne sont pas persuadés que les élèves comprennent ce qu'ils font.

Conseils aux futurs candidats

- Il faut prendre le temps de lire correctement chaque question et d'en comprendre les enjeux avant de se lancer dans une résolution aventureuse menant à une réponse incomplète, voire complètement hors-sujet.
- Dans la pratique, il ne faut pas rester plus de 4 ou 5 minutes sur une question, sauf éventuellement pour terminer un long calcul.
- Le programme interdit de procéder à une intégration par parties sur une intégrale impropre donc il est également interdit d'écrire des crochets d'intégration avec des bornes infinies.