Mathématiques approfondies emlyon 2024 - Rapport d'épreuve

Le sujet

Le sujet contient deux problèmes, de longueur comparable. Il y a des questions de programmation en Python dans les deux problèmes.
Le premier problème est un problème d'algèbre linéaire (et bilinéaire). Il traite de l'existence des racines d'une matrice puis dans une seconde partie d'un processus de convergence d'une suite de matrices vers une racine de l'identité en proposant nombre de questions classiques.

Le deuxième problème est un problème de probabilités continues. On y redémontre notamment des résultats sur les sommes de variables exponentielles. Le but est d'obtenir une preuve de la formule du Stirling par un argument probabiliste (une limite sous l'intégrale, et l'utilisation du théorème central limite).
Une section estimation vient se glisser au milieu pour tester les candidat.e.s sur ce thème.

Le sujet est long (il a été pointé à plusieurs reprises qu'il l'était trop) mais permet de proposer suffisamment de questions pour proposer à tou.te.s les candidat.e.s assez de matière pour tirer son épingle du jeu. Il n'est nullement nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note.
Ce sujet a permis de classer tou.te.s les candidat.e.s.

Les meilleures copies étaient très solides, rigoureuses, et ont pu balayer une grande partie du sujet (environ les 3/4). La plupart des candidat.e.s commencent cela dit par le Problème 1, ce qui de fait implique que très très peu de copies traitent la dernière partie du Problème 2, alors qu'il y avait aussi des questions très accessibles et classiques.

Le format devrait rester le même (deux problèmes).

Malgré un excellent travail des cobayeurs, de petites erreurs (coquilles, terminologie...) se sont glissées dans le sujet. Dans absolument chaque cas, le bénéfice a été accordé au candidat ou à la candidate et cela n'a posé aucun problème à l'évaluation des copies.
Néanmoins, un (encore plus) grand soin sera apporté pour ne plus rencontrer ces situations.

Barèmes, attentes du jury

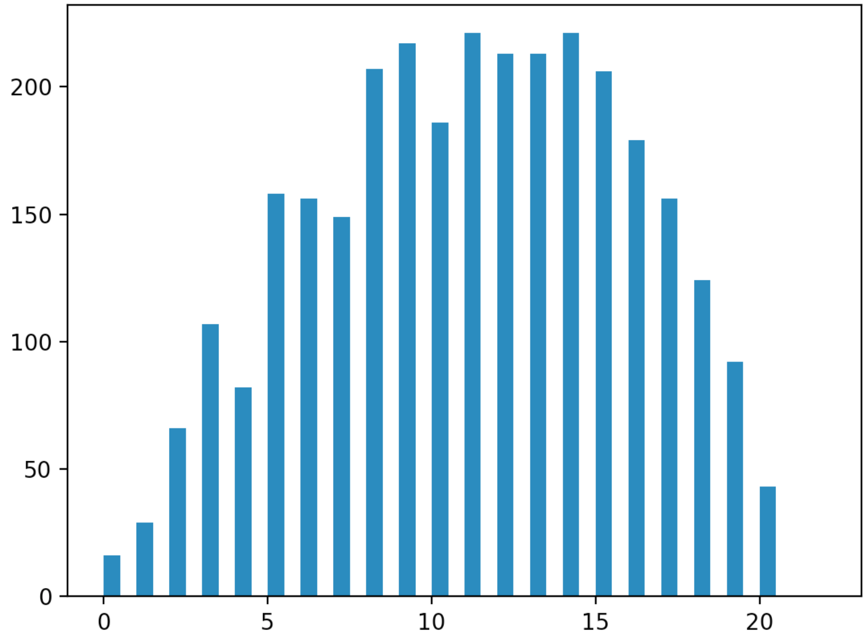
Le sujet est sur 200 points. Le premier problème contient 92 points, le second 102 et il y a 6 points accordés par les correcteurs et correctrices à la présentation, lisibilité, cohérence et rigueur générale, notamment le fait d'encadrer ses résultats, de soigner sa présentation, lisibilité et de quantifier toutes les variables et objets manipulés.
On insiste sur les efforts à faire sur ce point.
Les questions d'informatique représentaient un total de 9 points.

Après péréquation des notes, les statistiques de l'épreuve sont les suivantes (sur 3041 copies) :

- Moyenne (sur 20) : 11.39
- Écart-type (sur 20) : 4.7
- nombre de 20/20 : 43
- 9% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 5/20.
- 20% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 10.1/20.

- 32% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 15/20.
- 54% de questions bien traitées permettait d'obtenir la note de 20/20.

La distribution de toutes les notes est la suivante :



Remarques de correction et commentaires

Si les commentaires ci-dessous semblent critiques, il est à noter en premier lieu que beaucoup de copies sont bien présentées et témoignent d'un bel engagement des candidat.e.s. Dans l'ensemble, les candidat.e.s sont bien préparées, et ont pu montrer leur connaissance lors de cette épreuve.

Les questions Python, mis à part la question 15, étaient abordables et n'ont pas été suffisamment traitées par les candidat.e.s. Il ne faut pas négliger cette partie du programme. Davantage de questions Python pourraient être présentes à l'avenir.

Il est assez problématique de voir que la plupart des candidat.e.s savent montrer parfaitement qu'une fonction peut être considérée comme une densité de probabilité mais seulement un nombre marginal savent tracer une fonction affine par morceaux ! On insiste sur la nécessité de reprendre ce point.

Trop de candidat.e.s semblent ne pas comprendre la diagonalisabilité. Elle est parfois confondue avec l'inversibilité voire avec la symétrie (égale à sa transposée). Ces candidat.e.s semblent parfois confondre la diagonalisabilité avec les critères suffisants que l'on utilise pour la mettre en évidence.

Lors d'un calcul, les candidat.e.s doivent se forcer à justifier les étapes les plus importantes du calcul. Par exemple, la linéarité de l'espérance, lors d'un calcul d'espérance (on fera attention au fait qu'il ne faut pas invoquer l'éventuelle indépendance des variables aléatoires dans ce cas) ou l'indépendance de variables aléatoires lors d'un calcul de variance.
Il est rarissime que les candidat.e.s vérifient, à la fin d'une longue étude d'équation, que les solutions trouvées conviennent ; cela se voit à chaque question de synthèse du début du premier problème, où les "inclusions réciproques" des ensembles de solutions, pourtant faciles, ne sont pratiquement jamais mentionnées.
De manière analogue, trop de candidat.e.s oublient de conclure à la fin de leur raisonnement et oublient donc de répondre à la question posée !

Une question de cours, qui fait partie des résultats du programme comme son nom l'indique, doit être redémontrée.
On essaiera dans les futurs sujets de précéder la question de la mention *Question de cours* de sorte à lever toute ambiguité sur les attentes sur ce type de question.

L'utilisation d'éléments hors-programme n'est pas valorisé, bien au contraire. On attend des réponses dans le cadre du programme. En particulier, dans ce sujets :

* Le programme précise : *Les étudiants devront <u>savoir calculer</u> la fonction de répartition et la [une] densité de* $aX+b$ ($a \neq 0$).
  La formule $f_Y(x) = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ connue et utilisée par beaucoup de candidat.e.s, n'est donc pas au programme.
* Non pénalisants :
  - Les notations $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
  - Le *théorème spectral* (le programme ne donne pas de nom à ce théorème),
  - Polynômes écrits avec X majuscule,
  - Notation $\mathrm{diag}(\dots)$.

* Pénalisants :
  - Polynôme caractéristique d'une matrice,
  - Règle de Sarrus pour le déterminant 3×3,
  - Connaissances sur les symétries (question 6.b. du problème 1),
  - *Nilpotente donc non diagonalisable* n'est pas un résultat de cours (utilisé parfois en question 4.a. du problème 1). On attend quelques arguments pour démontrer ce résultat.

La majorité des candidat.e.s affirme que $a^2 = d^2 \Longrightarrow a = d$ et $a(b+c) = 0 \Longrightarrow b = -c$.
On rappelle que même si la réponse est donnée dans l'énoncé, le correcteur attend une justification rigoureuse.

Les hypothèses des théorèmes utilisées ne sont pas toujours bien sues et parfois ni citées ni vérifiées. On rappelle qu'il est indispensable de le faire lorsqu'on utilise un résultat.

Il est surprenant et très problématique de voir encore, dans des raisonnements par récurrence, des confusions entre "Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la proposition soit vraie au rang n" et "Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition soit vraie".

La manipulation des valeurs absolues est trop souvent mal (ou pas du tout) maitrisée.

La formule donnant $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ en fonction des coefficients de A est souvent fausse : notamment une partie des candidat.e.s écrit $\mathrm{Tr}({}^tA.A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$ au lieu de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

Trop de candidat.e.s tentent de "bluffer" et inventent des résultats farfelus pour parvenir à leurs fins ("$rg(M) = rg(M^2)$", confusion entre A et A^2, "A n'a pas de 0 sur la diagonale donc A est diagonalisable", "la somme de deux matrices inversibles est inversible" etc...).

Lors d'une justification de convergence d'une série par comparaison avec le terme général d'une série de Riemann convergente, attention à ne pas oublier de préciser que les séries sont à terme général positif.
Par ailleurs, l'écriture $\sum v_n \sim \sum \dfrac{1}{12n^2}$ ne peut être acceptée ; ce sont les termes généraux qu'il convient de comparer.

Conseils aux futur.e.s candidat.e.s

Il est regrettable que plusieurs candidat.e.s traitent les questions dans le désordre. Cela leur est préjudiciable puisqu'ils font ainsi fi de la logique du problème et se privent de l'aide que leur apporterait une attention particulière à celle-ci ; et cela met le correcteur dans de mauvaises dispositions à leur égard.

Il est valorisable et a été valorisé de reconnaître une erreur dans sa copie, plutôt que de prétendre qu'elle n'a pas eu lieu.

Bien lire le sujet et tenter de rester dans l'optique du concepteur du sujet. Voir les enchaînements entre les questions afin d'économiser ses forces. Enoncer complètement les théorèmes utilisés avec hypothèse(s) et conclusion(s) complètes.
Améliorer la présentation et surtout l'écriture. Certaines copies sont quasi-illisibles par endroit.